

MEF-T.5.4.3

MODELAREA NUMERICĂ A STRUCTURILOR MECANICE UNIDIMENSIONALE SOLICITATE TERMIC

CUPRINS

MEF-T.5.4.3.1 DESCRIEREA PROBLEMEI

MEF-T.5.4.3.2 ALGORITMUL DE DEZVOLTARE A MODELULUI NUMERIC

MEF-T.5.4.3.1 DESCRIEREA PROBLEMEI

Pentru cazul unui câmp termic staționar conductiv, caracteristic mediilor solide sau fluide, a căror particule au viteză de deplasare mică, se pot neglija fenomenele convective.

Când variația temperaturii într-o direcție este mult mai mare decât în celelalte două direcții ale unui sistem de referință cartezian, câmpul termic poate fi considerat unidimensional. Astfel, ecuația fundamentală, prin particularizare, devine [Olariu, 1986]

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_0 = 0, \quad (1)$$

unde λ este coeficientul de conductivitate termică și q_0 – fluxul termic volumic al sursei de căldură.

Condițiile limită, de tip Dirichlet când se specifică temperatura și de tip Neuman când se specifică fluxul termic, se pot scrie sub formele

$$T = g(x), \quad (2)$$

pentru $x \in S_T$ și

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \bar{n} + q = 0, \quad (3)$$

pentru $x \in S_q$. În aceste relații: $g(x)$ este o funcție de temperatură cunoscută cu domeniul de definiție S_T , n – versorul normalei de frontieră S_q , q – fluxul termic schimbat cu exteriorul.

MEF-T.5.4.3.2 ALGORITMUL DE DEZVOLTARE A MODELULUI NUMERIC

Pentru analiza câmpului termic unidimensional, se consideră problema din fig. 1,a, al cărei domeniu s-a discretizat cu elemente finite binodale (liniare). Funcția de aproximare a temperaturii, pe domeniul unui element finit oarecare e , are expresia

$$T_a(x) = N_i(x)T_i + N_j(x)T_j, \quad (4)$$

în care $T_{i,j}$ sunt valorile temperaturii în nodurile i și, respectiv, j (fig. 1,b) și

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad N_j(x) = -\frac{x_i - x}{x_j - x} \quad (5)$$

funcțiile de formă, corespunzătoare elementului finit, cu proprietățile:

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } i = j; \\ 0, & \text{pentru } i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

Datorită poziției particulare a elementelor finite în cazul acestui exemplu, nu s-au introdus sisteme de referință locale și deci toate definițiile sunt funcție de coordonatele globale. Transformarea modelului analitic, descris de relațiile (1), (2) și (3), într-o formă integrală se realizează folosind metoda reziduurilor ponderate, introducând funcția de aproximare a câmpului temperaturii (4), pe domeniul elementului finit e , în ecuația (1), aceasta nefiind îndeplinită, se obține reziduul R^e , cu expresia

$$R^e = \lambda^e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_0^e. \quad (7)$$

Relația de integrare a reziduurilor cu forma (7), pe subdomeniul V^e al domeniului de analiză V , când

$$L = \lambda^e \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ și } f_v = q_0^e,$$

devine,

$$\int_{V^e} w_k \left(\lambda^e \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} + q_0^e \right) dV = 0, \quad (8)$$

unde $k=1, 2$.

Folosind metoda Galerkin, cu funcțiile pondere chiar funcțiile de formă, se obține sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \int_{V^e} N_i \left(\lambda^e \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} + q_0^e \right) dV = 0, \\ \int_{V^e} N_j \left(\lambda^e \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} + q_0^e \right) dV = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Considerând secțiunea transversală a domeniului problemei de analizat constantă, de arie egală cu A ($dV=Adx$), sistemul (9) devine

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_j} N_i \left(\lambda^e \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} + q_0^e \right) dx = 0, \\ \int_{x_i}^{x_j} N_j \left(\lambda^e \frac{\partial^2 T_a}{\partial x^2} + q_0^e \right) dx = 0. \end{cases} \quad (10)$$

și ținând cont de formulele,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\lambda^e N_i \frac{dT}{dx} \right) &= \lambda^e \frac{dN_i}{dx} \frac{dT}{dx} + \lambda^e N_i \frac{d^2 T}{dx^2}, \\ \frac{d}{dx} \left(\lambda^e N_j \frac{dT}{dx} \right) &= \lambda^e \frac{dN_j}{dx} \frac{dT}{dx} + \lambda^e N_j \frac{d^2 T}{dx^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

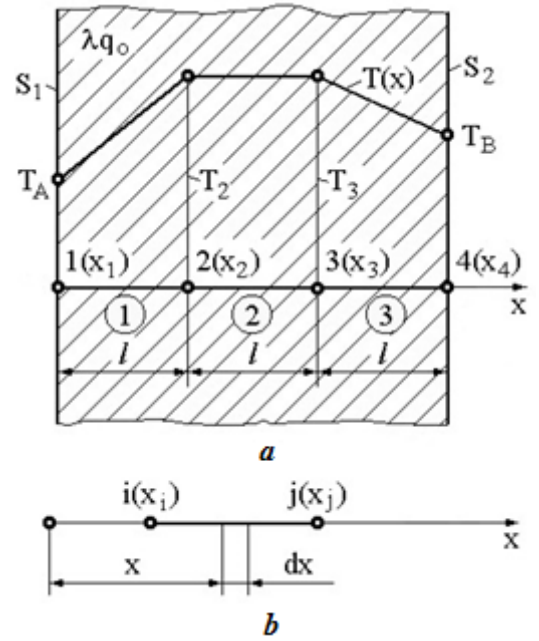


Fig. 1

ecuațiile sistemului (10) se pot scrie sub forma,

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_j} \frac{d}{dx} \left(\lambda^e N_i \frac{dT}{dx} \right) dx - \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_i}{dx} \frac{dT}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_j} N_i q_0^e dx = 0, \\ \int_{x_i}^{x_j} \frac{d}{dx} \left(\lambda^e N_j \frac{dT}{dx} \right) dx - \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_j}{dx} \frac{dT}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_j} N_j q_0^e dx = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Deoarece,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_j} \frac{d}{dx} \left(\lambda^e N_i \frac{dT}{dx} \right) dx &= \lambda^e N_i \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_i} - \lambda^e N_i \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_j} = -\lambda^e N_i \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_j} = q_i, \\ \int_{x_i}^{x_j} \frac{d}{dx} \left(\lambda^e N_j \frac{dT}{dx} \right) dx &= \lambda^e N_j \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_i} - \lambda^e N_j \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_j} = -\lambda^e N_j \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_i} = -q_j, \end{aligned} \quad (13)$$

cu q_i , q_j fluxurilor termice nodale, sistemul (12) devine,

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_i}{dx} \frac{dT}{dx} dx - \int_{x_i}^{x_j} q_0^e N_i dx + q_i, \\ \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_j}{dx} \frac{dT}{dx} dx - \int_{x_i}^{x_j} q_0^e N_j dx - q_j. \end{cases} \quad (14)$$

Derivata funcției de aproximare (4),

$$\frac{dT_a(x)}{dx} = \frac{dN_i(x)}{dx} T_i + \frac{dN_j(x)}{dx} T_j, \quad (15)$$

se înlocuiește în ecuațiile sistemului (14) și se obține ecuația matriceală (modelul numeric) a elementului finit,

$$[k^e][T^e] = [q^e], \quad (16)$$

în care,

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx & \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \\ \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx & \int_{x_i}^{x_j} \lambda^e \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \end{bmatrix} \quad (17)$$

este matricea de rigiditate a elementului finit e,

$$[T^e][T_i \quad T_j]^T, \quad (18)$$

matricea temperaturilor nodale necunoscute și

$$[q^e] = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_j} N_i q_0^e dx + q_i \\ \int_{x_i}^{x_j} N_j q_0^e dx - q_j \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

matricea termenilor liberi, în acest caz fluxurile nodale.

După efectuarea integralelor din relațiile (17) și (19), considerând funcțiile de formă (5), se obține

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^e}{x_j - x_i} & -\frac{\lambda^e}{x_j - x_i} \\ -\frac{\lambda^e}{x_j - x_i} & \frac{\lambda^e}{x_j - x_i} \end{bmatrix}, [q^e] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_0^e (x_j - x_i) + q_i \\ \frac{1}{2} q_0^e (x_j - x_i) - q_i \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Dacă peretele din fig. 1,a din material cu conductivitate termică λ , sub acțiunea surselor de căldură uniform distribuite, cu densitatea q_0 , se discretizează în trei elemente finite liniare cu lungimi egale cu l , matricele de rigiditate ale elementelor finite și matricele termenilor liberi (20) devin,

$$[k^{1,2,3}] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{I} & -\frac{\lambda}{I} \\ -\frac{\lambda}{I} & \frac{\lambda}{I} \end{bmatrix}, [q^{1,2,3}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_0 I + q_{1,2,3} \\ \frac{1}{2} q_0 I - q_{2,3,4} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Asamblarea acestor matrice conduce la obținerea modelului numeric – al problemei de analiză termică unidimensională din fig. 1,a – de forma,

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{I} & -\frac{\lambda}{I} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{I} & \frac{2\lambda}{I} & -\frac{\lambda}{I} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{I} & \frac{2\lambda}{I} & -\frac{\lambda}{I} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{I} & \frac{\lambda}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_0 I + q_1 \\ \frac{1}{2} q_0 I \\ \frac{1}{2} q_0 I \\ \frac{1}{2} q_0 I - q_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Prin asamblare fluxurile nodale interioare din nodurile 2 și 3 se anulează reciproc.

Condițiile limită (2) și (3), pentru cazul problemei din fig. 1,a, sunt: $T = T_A$, $q = 0$, pentru $x \in S_1$ și $T = T_B$, $q = 0$, pentru $x \in S_2$. Deci, în ecuația matriceală (22) se introduc $T_1 = T_A$, $T_4 = T_B$, $q_1 = 0$ și $q_4 = 0$.

Sistemul (22), cu 4 ecuații liniare și două necunoscute (T_2 și T_3), este un sistem compatibil nedeterminat, care după eliminarea ecuațiilor auxiliare (cele asociate temperaturilor cunoscute T_1 și T_2) devine,

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{I} & -\frac{\lambda}{I} \\ -\frac{\lambda}{I} & \frac{2\lambda}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_0 I \\ \frac{1}{2} q_0 I \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Cu soluțiile acestui sistem $T_2 = T_3 = 0,5 q_0 l^2 / \lambda$ și cu funcția de aproximare (4), se obține variația aproximativă a câmpului temperaturii, cu forma din fig. 1,a.