MAEF-T.5.4.2

MODELAREA NUMERICĂ A STRUCTURILOR PLANE

CUPRINS

MEF-T.5.4.2.1 DESCRIEREA PROBLEMEI

Pentru structura mecanică a plăcii din fig. 1, a, încărcată cu sarcina distribuită p şi forţa concentrată P, se urmăreşte elaborarea unui model cu elemente finite pentru determinarea câmpurilor deplasărilor, deformaţiilor şi tensiunilor, cu luarea în considerare a greutăţii proprii, cunoscând densitatea materialului ρ, modulul de elasticitate, E, şi coeficientul contracţiei transversale (Poisson), ν.

MEF-T.5.4.2.2 ALGORITMUL DE DEZVOLTARE A MODELULUI

Modelarea geometrică şi discretizarea

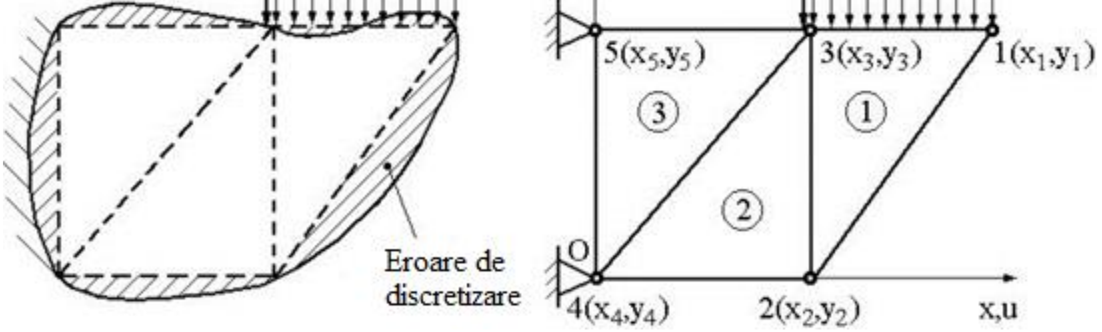
Domeniul continuu al problemei cu un număr infinit de puncte se înlocuieşte cu un domeniu discret, prin luarea în considerare a unui număr finit de puncte (noduri). Unirea controlată prin linii a nodurilor domeniului problemei conduce la obţinerea de subdomenii (elemente finite). Forma elementelor finite este diferită de la un caz la altul, în funcţie de tipul domeniului problemei şi tipul problemei de analizat. Pentru cazul structurii plane din fig. 1, a, considerând 5 noduri, se formează 3 elemente finite de formă triunghiulară cu laturi linii drepte (fig. 1, b). Necunoscutele problemei se consideră deplasările nodurilor după axele sistemului de coordonate xOy, de unde şi denumirea de *elemente finite nodale*. Astfel, numărul necunoscutelor problemei este finit, ca fiind egal cu produsul dintre numărul de noduri, n = 5, şi numărul deplasărilor (gradelor de libertate) posibile ale unui nod, ngl = 2.

Modelarea parametrilor fizici (cunoscuţi)

Încărcarea exterioară dată de forţele concentrate şi forţele distribuite, acţionează în nodurile şi, respectiv, pe laturile elementelor finite. În acest sens, se aleg ca noduri şi punctele în care acţionează forţele concentrate. De asemenea, se aleg ca noduri un număr finit de puncte de pe frontiera domeniului, unde acţionează sarcina distribuită; în aceste puncte se consideră cunoscute valorile forţei distribuite. Pentru simplificare, în exemplul din fig. 1, în zona încărcată cu sarcină distribuită, s-au considerat două noduri şi valorile forţei distribuite egale cu p_0.

Deoarece modelarea numerică ia în considerare valorile nodale ale parametrilor, forţele distribuite vor fi înlocuite cu un sistem de forţe echivalent, care acţionează în noduri. La fel se procedează şi cu încărcările interioare: forţe masice, tensiuni termice, tensiuni şi deformaţii iniţiale.

Este evident că procedând ca mai sus se produc o serie de aproximaţii legate de domeniul geometric şi



a *b*

Fig. 1

câmpurile parametrilor fizici (cunoscuţi şi necunoscuţi). Continuitatea parametrilor fizici (forţe, proprietăţi, deplasări, deformaţii, tensiuni) de multe ori este asigurată numai în noduri şi violată pe contururile interelemente.

Determinarea valorilor parametrilor geometrici şi fizici, corespunzători punctelor din interiorul fiecărui element finit, în funcţie de valorile nodale ale acestor parametri, se realizează folosind funcţiile de interpolare, corespunzătoare elementului finit respectiv.

Descrierea comportării structurii cu MEF se realizează pornind cu descrierea separată a comportării elementelor finite ale structurii, urmată de însumarea (asamblarea) acestora. Descrierea comportării elementelor finite se efectuează aplicând succesiv metodologia de obţinere a modelului numeric corespunzător tipului de element finit considerat, tuturor elementelor finite ale structurii.

Pentru obţinerea modelului numeric al elementului finit triunghiular, folosit la discretizarea structurii din fig. 1, a, se consideră un element finit oarecare e, cu nodurile i, j şi k, raportat la sistemul de coordonate global (fig. 2).

Variaţia reală a unei $\phi(x, y)$ necunoscută, care poate fi deplasarea u sau v a punctelor elementului finit e, se aproximează printr-o variaţie simplificată de forma

$$\phi_a = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \tag{1}$$

cu x, z coordonatele punctului oarecare P şi α_1, α_2, α_3 coeficienţi necunoscuţi, numiţi coordonate generalizate. Aceştia se pot determina rezolvând sistemul – obţinut în urma particularizării relaţiei (1), cu valorile nodale corespunzătoare ($\phi_a = \phi_i$, pentru x = x_i, y = y_i, $\phi_a = \phi_j$, pentru x = x_j, y = y_j, $\phi_a = \phi_k$, pentru x = x_k, y = y_k,) – de forma

$$\begin{cases} \phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ \phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ \phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k. \end{cases} \tag{2}$$

Soluţiile acestui sistem sunt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A^e}\left(a_1\phi_i + a_2\phi_j + a_3\phi_k\right), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A^e}\left(b_1\phi_i + b_2\phi_j + b_3\phi_k\right), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A^e}\left(c_1\phi_i + c_2\phi_j + c_3\phi_k\right), \end{aligned} \tag{3}$$

în care A^e este aria elementului finit cu expresia

$$A^e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, \tag{4}$$

iar coeficienţii a_i, b_i, c_i, cu i = 1, 2, 3, au expresiile următoare:

$$\begin{aligned} &a_1 = x_j y_k - x_k y_j, \quad && a_2 = x_k y_i - x_i y_k, \quad && a_3 = x_i y_j - x_j y_i, \\ &b_1 = y_j - y_k, && b_2 = y_k - y_i, && b_3 = y_i - y_j, \\ &c_1 = x_k - x_j, && c_2 = x_i - x_k, && c_3 = x_j - x_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Înlocuind relaţiile (3) în (1), se obţine expresia

$$\phi_a = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix}, \tag{6}$$

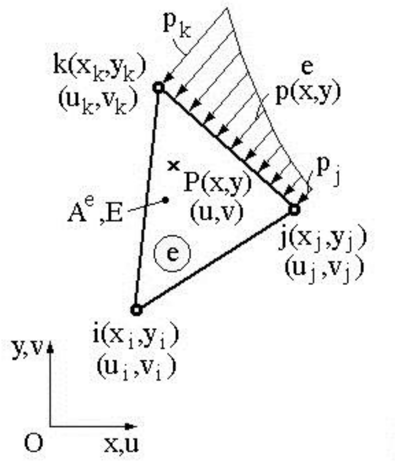


Fig. 2

în care funcţiile de formă $N_{i,j,k}$ au expresiile:

$$N_i = \frac{1}{2A^e}\left(a_1 + b_1 x + c_1 y\right),$$
$$N_j = \frac{1}{2A^e}\left(a_2 + b_2 x + c_2 y\right), \qquad (7)$$
$$N_k = \frac{1}{2A^e}\left(a_3 + b_3 x + c_3 y\right).$$

Comparând relaţiile (7) cu relaţiile de definire a sistemului de coordonate L-natural, considerând nodurile 1, 2, 3 identice cu i, j şi, respectiv, k, se constată că $L_i = N_i$, $L_j = N_j$, $L_k = N_k$, deci elementul finit folosit este izoparametric, deoarece atât pentru modelarea geometrică, cât şi pentru modelarea parametrului fizic se utilizezaă aceleaşi funcţii de formă.

Ţinând cont că parametrul ϕ_a poate fi oricare din componentele matricei deplasărilor, $[d] = [u \;\; v]^T$, corespunzătoare punctului oarecare P(x,z), se poate scrie relaţia,

$$[d] = [N][d^e], \qquad (8)$$

în care $[d^e] = [u_i \;\; v_i \;\; u_j \;\; v_j \;\; u_k \;\; v_k]^T$ reprezintă matricea deplasărilor nodale, iar

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

matricea funcţiilor de formă.

Modelul numeric al elementului finit

Energia potenţială totală a elementului finit are expresia,

$$\Pi^e = \int_{V^e}\left(\frac{1}{2}[\varepsilon]^T[E][\varepsilon] + [\varepsilon]^T[\sigma_0] - [\varepsilon]^T[E][\varepsilon_0]\right)dV - \int_{V^e}[d]^T[g]dV - \int_{A^e}[d]^T[p]dA - \left[d^e\right]^T\left[P^e\right], \qquad (10)$$

în care, necunoscutele sunt funcţiile continue, componente ale matricei deplasărilor [d] şi ale matricei deformaţiilor specifice [ε], cu domeniul de definire volumul elementului finit V^e. deoarece nu se poate stabili o soluţie exactă pentru configuraţia deplasărilor, care minimizează funcţionala (7), MEF acceptă o soluţie aproximativă a acestei configuraţii, de forma (8). Pe de altă parte, nici pentru deformaţiile specifice [ε] nu se pot concepe soluţii precise şi în continuare se explicitează funcţiile de aproximare şi pentru acestea.

Astfel, pornind de la relaţiile (9) şi (8), matricea deformaţiilor specifice

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}\left[d^e\right]\right), \qquad (11)$$

care după înmulţire şi aplicarea operatorului diferenţial devine

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix}\left[d^e\right]. \qquad (12)$$

După efectuarea derivatelor, ţinând cont de (7), această relaţie ia forma

$$[\varepsilon]=[B][d^e], \tag{13}$$

unde matricea,

$$[B]=\frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

cu elemente constante dependente de coordonatele nodale cunoscute (v. (5)). Acest tip de element finit, numit în literatura de limbă engleză CST (Constraint Strain Triange), are avantajul unei formulări simple ce poate fi definit direct în sistemul de coordonate global, dar este foarte anevoios de descris în programe performante (implică transformări diferite pentru fiecare element finit al structurii). Matricea [B] aproximează câmpul deformaţiilor specifice în raport cu deplasările nodale necunoscute.

Folosind proprietăţile operaţiilor matriceale, se pot scrie relaţiile,

$$[d]^T=\left[[N][d^e]\right]^T=\left[d^e\right]^T[N]^T, \tag{15}$$

$$[\varepsilon]^T=\left[[B][d^e]\right]^T=\left[d^e\right]^T[B]^T, \tag{16}$$

care împreună cu relaţiile (8) şi (13), înlocuite în expresia energiei potenţiale totale a elementului finit (10), determină următoarea formă

$$\begin{aligned}\Pi^e=&\frac{1}{2}\left[d^e\right]^T\int_{V^e}[B]^T[E][B]dV\left[d^e\right]+\left[d^e\right]^T\int_{V^e}[B]^T[\sigma_0]dV-\left[d^e\right]^T\int_{V^e}[B]^T[E][\varepsilon_0]dV-\\ &-\left[d^e\right]^T\int_{V^e}[N]^T[g]dV-\left[d^e\right]^T\int_{A^e}[N]^T[p]dA-\left[d^e\right]^T\left[P^e\right].\end{aligned} \tag{17}$$

Expresia matematică a teoremei energiei potenţiale minime, corespunzătoare elementului finit e, $\delta\Pi^e=0$, pentru cazul matricei necunoscutelor $\left[d^e\right]=\left[d_1^e \quad d_2^e \quad \ldots \quad d_r^e\right]$, cu r numărul necunoscutelor nodale, devine

$$\delta\Pi^e=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial\Pi^e}{\partial d_i^e}\delta d_i^e=0. \tag{18}$$

Aplicând formulele:

$$\frac{\partial\left(\left[d_i^e\right]^T[A]\left[d_i^e\right]\right)}{\partial\left[d_i^e\right]}=2[A]\left[d_i^e\right], \tag{19}$$

$$\frac{\partial\left(\left[d_i^e\right]^T[D]\right)}{\partial\left[d_i^e\right]}=[D], \tag{20}$$

cu [A] şi [D] matrice pătratice, în relaţia (18), când Π^e are expresia (17), se obţine,

$$\left[d^e\right]^T\left(\int_{V^e}[B]^T[E][B]dV\left[d^e\right]+\int_{V^e}[B]^T[\sigma_0]dV-\int_{V^e}[B]^T[E][\varepsilon_0]dV-\int_{V^e}[N]^T[g]dV-\int_{A^e}[N]^T[p]dA-\left[P^e\right]\right)=0 \tag{21}$$

Deoarece, deplasările infinitezimale ale nodurilor elementului finit $[\delta d^e]$ sunt nenule, din relaţia (21) rezultă,

$$[k^e][d^e]= [q^e], \tag{22}$$

unde,

$$\left[k^e\right]=\int_{V^e}[B]^T[E][B]dV\,, \tag{23}$$

reprezintă matricea de rigiditate a elementului finit e, iar

$$\left[q^e\right]=\left[P_\sigma^e\right]+\left[P_\varepsilon^e\right]+\left[P_g^e\right]+\left[P_p^e\right]+\left[P^e\right] \tag{24}$$

matricea forţelor nodale (termenilor liberi) ale elementului finit, cu:

$$\left[P_\sigma^e\right]=-\int_{V^e}[B]^T[\sigma_0]dV \tag{25}$$

forţele corespunzătoare tensiunilor iniţiale,

$$\left[P_\varepsilon^e\right]=\int_{V^e}[B]^T[E][\varepsilon_0]dV \tag{26}$$

forţele nodale corespunzătoare deformaţiilor iniţiale,

$$\left[P_g^e\right]=\int_{V^e}[N]^T[g]dV \tag{27}$$

forţele nodale corespunzătoare forţelor masice,

$$\left[P_p^e\right]=\int_{A^e}[N]^T[p]dA \tag{28}$$

forţele nodale corespunzătoare presiunilor care acţionează pe frontiera elementului finit, $[P^e]$ matricea forţelor nodale concentrate interioare (eforturi) şi exterioare. În figura 3 pentru elementul finit e, se prezintă componentele forţelor de mai sus. Relaţia (22) reprezintă ecuaţia matriceală – *modelul numeric* – a elementului finit, care este un sistem de ecuaţii algebrice liniare.

Modelul numeric al structurii

Pentru întreaga structură, cu m elemente finite, energia potenţială totală este dată de relaţia:

$$\Pi=\sum_{e=1}^{m}\Pi^e\,. \tag{29}$$

Având în vedere că suma integralelor din relaţia (17) este egală cu integrala sumei,

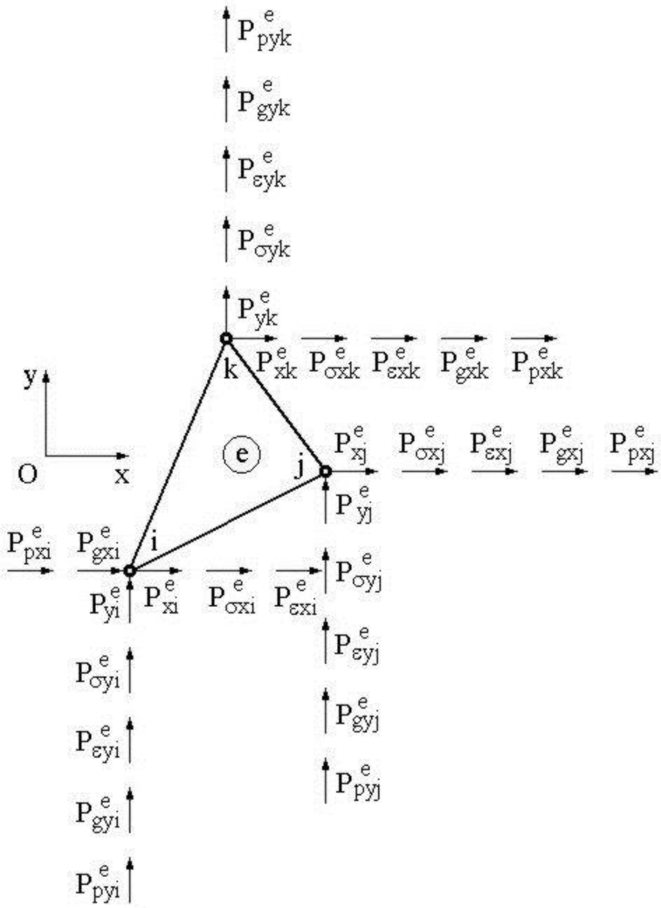


Fig. 3

extinzând principiul teoremei energiei potenţiale minime pentru întreaga structură, se obţin ecuaţia matriceală a structurii

$$[K][D] = [Q], \tag{30}$$

în care,

$$[K] = \sum_{e=1}^{m} \left[k^e\right] \tag{31}$$

este matricea de rigiditate a structurii,

$$[Q] = \sum_{e=1}^{m} \left[q^e\right] \tag{32}$$

matricea forţelor din nodurile structurii, iar $[D] = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \ldots \; u_n \quad v_n]^T$ este matricea necunoscutelor nodale ale structurii. Sumele din relaţiile (31) şi (32) se fac prin operaţia de asamblare, care presupune însumarea elementelor matricelor de rigiditate sau a elementelor matricei forţelor nodale, care se referă la acelaşi grad de libertate.

Pentru cazul structurii din fig. 1, deoarece matricele $[B]$ şi $[E]$ au elemente constante şi

$$dV^e = A^e h\,, \tag{33}$$

matricea de rigiditate a elementului finit e, dată de relaţia (23), devine,

$$\left[k^e\right] = [B]^T [E][B] A^e h\,. \tag{34}$$

Considerând situaţia de încărcare aproximativă din fig. 1,b, cu forţă concentrată P în nodul 3 şi cu forţa distribuită p_0 pe latura 13 a elementului finit 1 şi neglijând efectul tensiunilor şi deformaţiilor iniţiale şi efectul forţelor masice, matricele de rigiditate şi matricele termenilor liberi ale elementelor finite ale structurii sunt:

$$\left[k^1\right] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{2} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 \\ \hline k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & k_{45}^1 & k_{46}^1 \\ \hline k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 & k_{55}^1 & k_{56}^1 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 & k_{65}^1 & k_{66}^1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 3 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad \left[q^1\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0{,}5\, p_0 l_{13} h \\ \hline P_{x3}^1 \\ -0{,}5\, p_0 l_{13} - P + P_{y3}^1 \\ \hline P_{x2}^1 \\ P_{y2}^1 \end{array}\right]; \tag{35}$$

$$\left[k^2\right] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} & \multicolumn{2}{c}{2} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 & k_{15}^2 & k_{16}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & k_{26}^2 \\ \hline k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 & k_{35}^2 & k_{36}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 & k_{45}^2 & k_{46}^2 \\ \hline k_{51}^2 & k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & k_{56}^2 \\ k_{61}^2 & k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & k_{65}^2 & k_{66}^2 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 3 \\ \\ 4 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad \left[q^2\right] = \left[\begin{array}{c} P_{x3}^2 \\ P_{y3}^2 \\ \hline P_{x4}^2 \\ P_{y4}^2 \\ \hline P_{x2}^2 \\ P_{y2}^2 \end{array}\right]; \tag{36}$$

$$\left[k^3\right]=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 & k_{15}^3 & k_{16}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{25}^3 & k_{26}^3 \\ \hline k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 \\ k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 \\ \hline k_{51}^3 & k_{52}^3 & k_{53}^3 & k_{54}^3 & k_{55}^3 & k_{56}^3 \\ k_{61}^3 & k_{62}^3 & k_{63}^3 & k_{64}^3 & k_{65}^3 & k_{66}^3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \\ 5 \\ \\ 4 \\ \end{array}, \quad \left[q^3\right]=\begin{bmatrix} P_{x3}^3 \\ P_{y3}^3 \\ P_{x5}^3 \\ P_{y5}^3 \\ P_{x4}^3 \\ P_{y4}^3 \end{bmatrix}; \qquad (37)$$

Valorile k^e_{ij}, cu i, j = 1, 2,…, 6 şi e = 1, 2, 3, sunt contante numerice, calculate cu relaţia (34) şi $I_{13} = ((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2)^{0,5}$ este lungimea muchiei 13.

Asamblarea matricelor de rigiditate elementele şi ale matricelor termenilor liberi de mai sus, ţinând cont de corespondenţa gradelor de libertate şi a nodurilor (marcate pe frontiera matricelor de rigiditate) elementelor finite, rezultă modelul numeric, (30), unde:

$$[K]=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{55}^1+k_{55}^2 & k_{56}^1+k_{56}^2 & k_{53}^1+k_{51}^2 & k_{54}^1+k_{52}^2 & k_{53}^2 & k_{54}^2 & 0 & 0 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{65}^1+k_{65}^2 & k_{66}^1+k_{66}^2 & k_{63}^1+k_{61}^2 & k_{64}^1+k_{62}^2 & k_{63}^2 & k_{64}^2 & 0 & 0 \\ \hline k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{35}^1+k_{15}^1 & k_{36}^1+k_{16}^2 & k_{33}^1+k_{11}^2+k_{11}^3 & k_{34}^1+k_{12}^2+k_{12}^3 & k_{13}^2+k_{15}^3 & k_{14}^2+k_{16}^2 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{45}^1+k_{25}^2 & k_{46}^1+k_{26}^2 & k_{43}^1+k_{21}^2+k_{21}^3 & k_{44}^1+k_{22}^2+k_{22}^3 & k_{23}^2+k_{25}^3 & k_{24}^2+k_{26}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ \hline 0 & 0 & k_{35}^2 & k_{36}^2 & k_{31}^2+k_{31}^3+k_{51}^3 & k_{32}^2+k_{32}^3+k_{52}^3 & k_{33}^2+k_{55}^3 & k_{34}^2+k_{56}^3 & k_{53}^3 & k_{54}^3 \\ 0 & 0 & k_{42}^2+k_{45}^2 & k_{46}^2+k_{46}^2 & k_{41}^1+k_{41}^2+k_{61}^3 & k_{42}^2+k_{42}^2+k_{52}^3 & k_{43}^2+k_{65}^3 & k_{44}^2+k_{66}^3 & k_{63}^2 & k_{64}^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ 5 \\ \\ \end{array} \qquad (38)$$

$$[Q]=\left[0 \;\; -\frac{1}{2}p_0 I_{13}h \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -\frac{1}{2}p_0 I_{13}h - P \;\; P_{x4}^2 \;\; P_{y4}^2 \;\; P_{x5}^2 \;\; P_{y5}^2\right]^T \qquad (39)$$

şi $[D] = [u_1 \;\; v_1 \;\; u_2 \;\; v_2 \;\; u_3 \;\; v_3 \;\; u_4 \;\; v_4 \;\; u_5 \;\; v_5]^T$.

La asamblarea elementelor matricelor termenilor liberi s-a ţinut cont de ecuaţiile de echilibru ale forţelor nodale interioare, pentru nodul 3; $P_{x2}^1 + P_{x2}^2 = 0,\; P_{y2}^1 + P_{y2}^2 = 0$, pentru nodul 2 (fig. 1, b).

Elementele matricei de rigiditate a structurii au valori constante, dependente de coordonatele nodale şi de caracteristicile materialului (E – modulul de elasticitate longitudinală, υ - coeficientul lui Poisson). Matricele de rigiditate ale elementelor finite şi a structurii sunt simetrice, consecinţă a teoremei reciprocităţii tensiunilor.

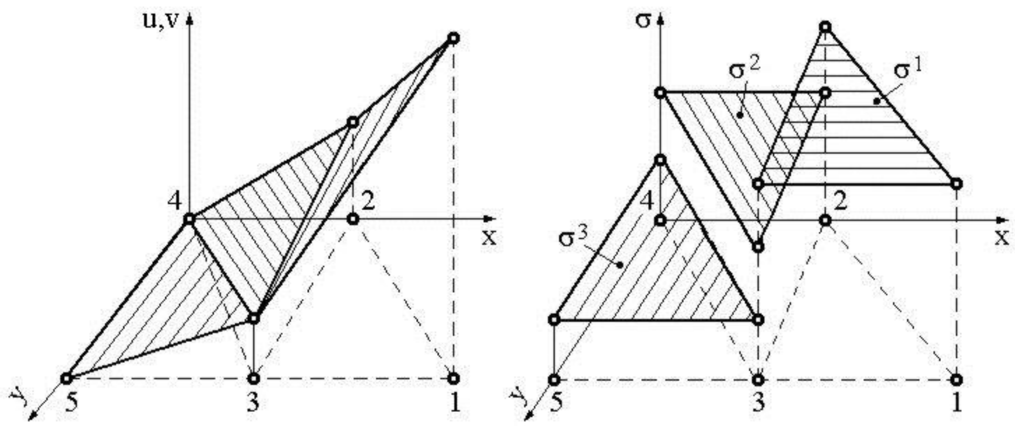
Sistemul de ecuaţii algebrice liniare (30), cu matricea sistemului şi a termenilor liberi date de relaţii (38) şi, respectiv, (39), este un sistem compatibil nedeterminat, de 10 ecuaţii cu 14 necunoscute, deplasările nodale, componente ale matricei [D] şi reacţiunile de reazeme: $R_{x4} = P_{x4}^2 + P_{x4}^3,\;\; R_{y4} = P_{y4}^2 + P_{y4}^3,\;\; R_{x5} = P_{x5}^2, R_{y5} = P_{y5}^2$. Matricea sistemului în acest caz este singulară. Fizic aceasta se interpretează prin mişcarea generală de rigid a structurii, datorită lipsei implementării condiţiilor limită de rezemare. Pentru structura idealizată din fig. 1, b, deplasările corespunzătoare nodurilor 4 şi 5 sunt nule (u_4 = 0, v_4 = 0, u_5 = 0, v_5 = 0). Astfel, prin eliminarea liniilor şi coloanelor (7, 8, 9 şi 10), din matricea de rigiditate (matricea sistemului) şi din matricea încărcărilor nodale corespunzătoare acestor deplasări, rezultă următorul sistem de ecuaţii liniare, compatibil determinat,

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{55}^1+k_{55}^2 & k_{56}^1+k_{56}^2 & k_{53}^1+k_{51}^2 & k_{54}^1+k_{52}^2 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{65}^1+k_{65}^2 & k_{66}^1+k_{66}^2 & k_{63}^1+k_{61}^2 & k_{64}^1+k_{62}^2 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{35}^1+k_{15}^2 & k_{36}^1+k_{16}^2 & k_{33}^1+k_{11}^2+k_{11}^3 & k_{34}^1+k_{12}^2+k_{12}^3 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{45}^1+k_{25}^2 & k_{46}^1+k_{26}^2 & k_{43}^2+k_{21}^2+k_{21}^3 & k_{44}^1+k_{22}^2+k_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} p_0 l_{13} h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} p_0 l_{13} h - P \end{bmatrix} \tag{40}$$

Rezolvarea modelului numeric

Cu soluţiile acestui sistem, folosind relaţiile (15) şi (16) înlocuite în legea lui Hooke [σ] = [E] [ε], rezultă câmpurile deplasărilor, deformaţiilor şi, respectiv, tensiunilor, pe întreg domeniul problemei. Formele de variaţie ale câmpurilor deplasărilor şi tensiunilor sunt schematizate în fig. 4. de asemenea, se observă şi în cazul acestei structuri continuitatea funcţiei de aproximare a deplasărilor (fig. 4, a) şi discontinuitatea (generată de constanţa matricei [B] pentru fiecare element), deci şi aproximarea mai grosieră a funcţiei tensiunilor. Înlocuind deplasările acum cunoscute în ecuaţiile elementelor finite, se pot determina forţele interioare şi reacţiunile din reazeme.

Operaţiile de calcul al elementelor matricei termenilor liberi (forţe nodale echivalente cu sarcinile distribuite pe contur), de asamblare a elementelor matricelor de rigiditate şi vectorilor încărcărilor nodale, de implementare a condiţiilor limită (de rezemare) şi de rezolvare a sistemului de ecuaţii în cadrul acestor exemple au fost realizate mai mult intuitiv. În capitolul următor se vor prezenta proceduri specifice MEF, care realizează aceste operaţii.



a *b*

Fig. 4