

MEF-T.5.4.1

MODELAREA NUMERICĂ A STRUCTURILOR UNIDIMENSIONALE SOLICITATE AXIAL

CUPRINS

MEF-T.5.4.1.1 DESCRIEREA PROBLEMEI

MEF-T.5.4.1.2 ALGORITMUL DE DEZVOLTARE A MODELULUI

MEF-T.5.4.1.1 DESCRIEREA PROBLEMEI

Pentru structura mecanică a coloanei verticale din fig. 1, a, încărcată cu sarcina concentrată P , se urmărește elaborarea unui model cu elemente finite pentru determinarea câmpurilor deplasărilor, deformațiilor și tensiunilor, cu luarea în considerare a greutateii proprii, cunoscând densitatea materialului ρ , modulul de elasticitate, E , și coeficientul contracției transversale (Poisson), ν .

MEF-T.5.4.1.2 ALGORITMUL DE DEZVOLTARE A MODELULUI

Modelarea geometrică și discretizarea

Bara de secțiune variabilă (fig. 1) se consideră ca fiind compusă din tronsoane cilindrice cu secțiune constantă. Discretizarea se realizează cu elemente finite unidimensionale binodale (liniare) cu secțiune constantă (fig. 1, a, b, c). Considerând un element finit oarecare e , cu nodurile i și j (fig. 1, d), raportat la sistemul global de coordonate Oy și la sistemul local de coordonate ξ - naturale $O'\xi$, modelarea geometrică se descrie cu relația,

$$y = N_i(\xi)y_i + N_j(\xi)y_j = [N][y]^e \quad (1)$$

în care: $[y]^e = [y_i \ y_j]^T$, este matricea coordonatelor nodale cunoscute; $[N] = [N_i(\xi) \ N_j(\xi)]$ – matricea funcțiilor de formă, cu expresiile:

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_j(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2)$$

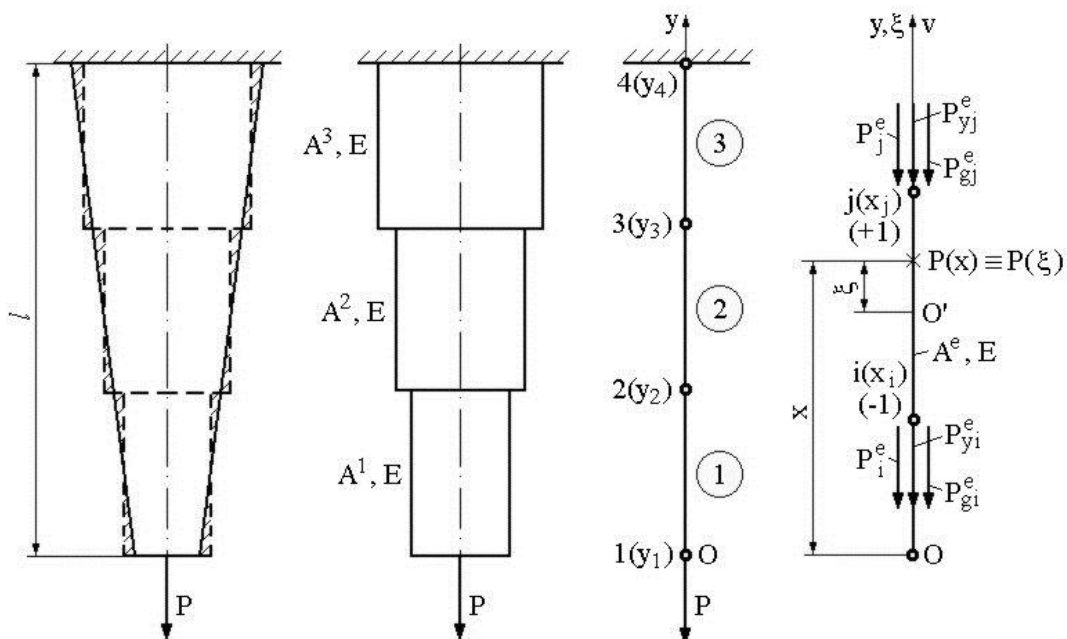


Fig. 1

Modelarea parametrilor fizici

Funcția de aproximare a parametrului fizic necunoscut, deplasarea după Oy, se formează folosind aceleași funcții de formă (element finit izoparametric), cu relația

$$v = N_i(\xi)v_i + N_j(\xi)v_j = [N][d^e] \quad (3)$$

în care s-au notat cu: v_i și v_j deplasările necunoscute corespunzătoare nodurilor i și, respectiv j; $[d^e] = [y_i \ y_j]^T$ – matricea deplasărilor nodale necunoscute.

Parametrii fizici cunoscuți (P, E, ν , ρ) au valori constante și nu se pune problema aproximării (modelării)

Modelul numeric al elementului finit

În vederea obținerii modelului numeric al elementului finit e, se aplică metoda variațională – fără a folosi ecuațiile diferențiale ale teoriei elasticității – pornind de la expresia energiei potențiale totale, particularizată pentru această problemă,

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_{v^e} [\varepsilon]^T [E][\varepsilon] dv - \int_{v^e} [g]^T [d] dv - [P^e]^T [d^e] \quad (4)$$

care, ținând cont că aria secțiunii transversale A^e a elementului finit este constantă, devine

$$\Pi^e = \frac{A^e}{2} \int_{y_i}^{y_j} [\varepsilon]^T [E][\varepsilon] dy - A^e \int_{y_i}^{y_j} [g]^T [d] dy - [P^e]^T [d^e] \quad (5)$$

Parametrii din această relație au următoarele notații, expresii și semnificații: $[\varepsilon] = \varepsilon_y$ reprezintă matricea deformațiilor, care pentru cazul de față degenerază într-un scalar, deformația specifică liniară; $[E] = E$ – matricea de elasticitate, degenerată în modulul de elasticitate longitudinală; $[g] = \rho g [0 \ -1 \ 0]^T$ – matricea forțelor masice, cu ρ densitatea materialului și g accelerația gravitațională; $[P^e] = [P_{y_i}^e + P_i^e \ P_{y_j}^e + P_j^e]$ – matricea forțelor concentrate nodale, interioare (eforturi) și exterioare (încărcări); $[d] = v$ – matricea deplasărilor necunoscute (fig. 1, d).

Folosind relațiile (1), (2) și (3), rezultă următoarele dependențe:

$$\xi = \frac{2}{y_j - y_i} y - \frac{y_i + y_j}{y_j - y_i} \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} = \left(-\frac{1}{2} v_i + \frac{1}{2} v_j \right) \frac{2}{y_j - y_i} = \frac{1}{y_j - y_i} (-v_i + v_j) \quad (7)$$

Înlocuind relația (7) și

$$dy = \frac{y_j - y_i}{2} d\xi \quad (8)$$

în expresia energiei potențiale totale (5), se obține

$$\Pi^e = \frac{A^e E}{4(y_j - y_i)} \int_{-1}^1 (v_i - v_j)^2 d\xi + \frac{A^e (y_j - y_i) \rho g}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} (1 + \xi) \right) v_j d\xi - [P^e]^T [d^e] \quad (9)$$

Se observă că în această formă, funcționala Π^e este o funcție ale deplasărilor nodale necunoscute v_i și v_j .

Teorema energiei potențiale minime, aplicată elementului finit e,

$$\delta \Pi^e = \frac{\partial \Pi^e}{\partial v_i} \delta v_i + \frac{\partial \Pi^e}{\partial v_j} \delta v_j = 0 \quad (10)$$

implică sistemul de ecuații,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^e}{\partial v_i} = 0, \\ \frac{\partial \Pi^e}{\partial v_j} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

care, ținând cont de expresia (9), devine

$$\begin{cases} \frac{A^e E}{4(y_j - y_i)} \int_{-1}^1 2(v_i - v_j) d\xi + \frac{A^e (y_j - y_i) \rho g}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 - \xi) d\xi - P_{yi}^e - P_i^e = 0, \\ \frac{A^e E}{4(y_j - y_i)} \int_{-1}^1 2(v_j - v_i) d\xi + \frac{A^e (y_j - y_i) \rho g}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 + \xi) d\xi - P_{yj}^e - P_j^e = 0. \end{cases} \quad (12)$$

deoarece variabilele necunoscute v_i, v_j sunt independente de variabila ξ , în urma efectuării integralelor sistemul (12) se poate scrie sub forma

$$[k^e][d^e] = [q^e] \quad (13)$$

în care,

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{A^e E}{y_j - y_i} & -\frac{A^e E}{y_j - y_i} \\ -\frac{A^e E}{y_j - y_i} & \frac{A^e E}{y_j - y_i} \end{bmatrix} \quad (14)$$

reprezintă matricea de rigiditate corespunzătoare elementului finit e ,

$$[q]^e = \begin{bmatrix} P_{gi}^e + P_{yi}^e + P_i^e \\ P_{gj}^e + P_{yj}^e + P_j^e \end{bmatrix} \quad (15)$$

matricea încărcărilor nodale, cu

$$P_{gi}^e = P_{gj}^e = -\frac{A^e (y_j - y_i) \rho g}{2} \quad (16)$$

forțele nodale echivalente greutatei proprii a elementului finit (fig. 1, d).

Ecuația matriceală (13) este un sistem algebric liniar – *modelul numeric* – care descrie comportarea elementului finit oarecare și constituie baza în vederea obținerii modelului numeric global al întregii structuri. Matricea de rigiditate (14) sintetizează toate caracteristicile geometrice și fizice ale elementului finit respectiv.

Particularizând componentele ecuației (13) pentru cele trei elemente finite ale structurii, se obține:

$$\begin{aligned} [k^1] &= \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix}, & [d^1] &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, & [q^1] &= \begin{bmatrix} P_{g1}^1 - P \\ P_{g2}^1 + P_{y2}^1 \end{bmatrix}; \\ [k^2] &= \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix}, & [d^2] &= \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, & [q^2] &= \begin{bmatrix} P_{g2}^2 + P_{y2}^2 \\ P_{g3}^2 + P_{y3}^2 \end{bmatrix}; \\ [k^3] &= \begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 \end{bmatrix}, & [d^3] &= \begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, & [q^3] &= \begin{bmatrix} P_{g3}^3 + P_{y3}^3 \\ P_{g4}^3 + P_{y4}^3 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (17)$$

Parametrii necunoscuți din aceste ecuații au următoarele expresii:

$$k_{11}^1 = k_{22}^1 = -k_{21}^1 = -k_{12}^1 = \frac{A^1 E}{y_2 - y_1},$$

$$k_{11}^2 = k_{22}^2 = -k_{21}^2 = -k_{12}^2 = \frac{A^2 E}{y_3 - y_2},$$

$$k_{11}^3 = k_{22}^3 = -k_{21}^3 = -k_{12}^3 = \frac{A^3 E}{y_4 - y_3},$$

$$P_{g1}^1 = P_{g2}^1 = -\frac{A^1 (y_2 - y_1) \rho g}{2},$$

$$P_{g2}^2 = P_{g3}^2 = -\frac{A^2 (y_3 - y_2) \rho g}{2},$$

$$P_{g3}^3 = P_{g4}^3 = -\frac{A^3 (y_4 - y_3) \rho g}{2},$$

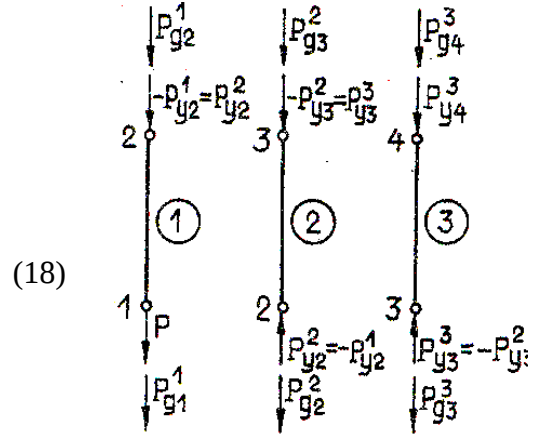


Fig. 2

în care: A^j , cu $j = 1, 2, 3$, sunt ariile secțiunilor elementelor finite; y_k , cu $k = 1, 2, 3, 4$ – coordonatele nodurilor structurii. În matricele încărcărilor $[q^e] = [q_{yi}^e]$ cu $e = 1, 2, 3$, parametrii P_{yi}^e , cu $i = 1, 2, 3$, sunt forțele nodale interioare (eforturile), necunoscute și P este forța concentrată exterioară din nodul 1, cunoscută ca valoare. În fig. 2 se observă echilibrul static al elementelor finite ale structurii, cu respectarea principiului acțiunii-reacțiunii pentru forțele interioare P_{yi}^e .

Modelul numeric al structurii

Teoretic, pentru stabilirea modelului numeric al întregii structuri se pornește de la energia potențială totală, dată de funcționala,

$$\Pi(v_1, v_2, v_3, v_4) = \Pi^1(v_1, v_2) + \Pi^2(v_2, v_3) + \Pi^3(v_3, v_4) = \sum_{e=1}^3 \Pi^e \quad (19)$$

în care,

$$\Pi^1 = \frac{A^1 E}{4(y_2 - y_1)} \int_{-1}^1 (v_1 - v_2)^2 d\xi + \frac{A^1 (y_2 - y_1) \rho g}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} (1 - \xi) v_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) v_2 \right) d\xi - [P^1]^T [d^1] \quad (20)$$

$$\Pi^2 = \frac{A^2 E}{4(y_3 - y_2)} \int_{-1}^1 (v_2 - v_3)^2 d\xi + \frac{A^2 (y_3 - y_2) \rho g}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} (1 - \xi) v_2 + \frac{1}{2} (1 + \xi) v_3 \right) d\xi - [P^2]^T [d^2] \quad (21)$$

$$\Pi^3 = \frac{A^3 E}{4(y_4 - y_3)} \int_{-1}^1 (v_3 - v_4)^2 d\xi + \frac{A^3 (y_4 - y_3) \rho g}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} (1 - \xi) v_3 + \frac{1}{2} (1 + \xi) v_4 \right) d\xi - [P^3]^T [d^3] \quad (22)$$

În aceste expresii: $[d^1] = [v_1 \ v_2]^T$, $[d^2] = [v_2 \ v_3]^T$, $[d^3] = [v_3 \ v_4]^T$ sunt matricele deplasărilor corespunzătoare celor trei elemente finite; $[P^1] = [P \ -P_{y2}^1]^T$, $[P^2] = [P_{y2}^2 \ -P_{y3}^2]^T$, $[P^3] = [P_{y3}^3 \ -P_{y4}^3]^T$ – matricele forțelor (încărcări și eforturi) nodale concentrate. Semnul forțelor componente se stabilește față de sistemul de coordonate global. Forțele interioare (eforturile) dintr-un nod comun la două elemente finite adiacente, sunt egale și de sens opus (fig. 2). Forțele concentrate exterioare se aplică numai în noduri și se iau în considerare o singură dată în cadrul ecuației unui element finit.

Din forma matematică a principiului energiei potențiale minime pentru întreaga structură,

$$\delta \Pi = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \Pi}{\partial v_k} \delta v_k = 0. \quad (23)$$

rezultă sistemul,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_k} = 0. \quad (24)$$

Ținând cont de relația (10), acest sistem devine,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_k} = \sum_{e=1}^m \frac{\partial \Pi^e}{\partial v_k} = 0 \quad (25)$$

unde indicii $k = 1, 2, 3, 4$ indică numărul gradului de libertate corespunzător nodurilor structurii, iar $m = 1, 2, 3$ numărul elementului finit. Explicit, relația (25) are următoarea formă,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} = \frac{\partial \Pi^1}{\partial v_1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_2} = \frac{\partial \Pi^1}{\partial v_2} + \frac{\partial \Pi^2}{\partial v_2} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_3} = \frac{\partial \Pi^2}{\partial v_3} + \frac{\partial \Pi^3}{\partial v_3} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v_4} = \frac{\partial \Pi^3}{\partial v_4} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Se observă că derivata funcționalei în raport cu una din necunoscute este egală cu suma derivatelor funcționalelor elementelor finite vecine, care au nodul – căruia îi corespunde gradul de libertate al necunoscutei – comun.

Efectuând derivatele și integralele din sistemul de ecuații (26) și, respectiv, din relațiile (21), (22) și (23), rezultă ecuația matriceală a structurii,

$$[K][D] = [Q] \quad (27)$$

în care,

$$[D] = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T \quad (28)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{A^1 E}{y_2 - y_1} & -\frac{A^1 E}{y_2 - y_1} & 0 & 0 \\ -\frac{A^1 E}{y_2 - y_1} & \frac{A^1 E}{y_2 - y_1} + \frac{A^2 E}{y_3 - y_2} & -\frac{A^2 E}{y_3 - y_2} & 0 \\ 0 & -\frac{A^2 E}{y_3 - y_2} & \frac{A^2 E}{y_3 - y_2} + \frac{A^3 E}{y_4 - y_3} & -\frac{A^3 E}{y_4 - y_3} \\ 0 & 0 & -\frac{A^3 E}{y_4 - y_3} & \frac{A^3 E}{y_4 - y_3} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{-A^1(y_2 - y_1)\rho g}{2} - P \\ \frac{-A^1(y_2 - y_1)\rho g}{2} - \frac{A^2(y_3 - y_2)\rho g}{2} \\ \frac{-A^2(y_3 - y_2)\rho g}{2} - \frac{A^3(y_4 - y_3)\rho g}{2} \\ \frac{-A^3(y_4 - y_3)\rho g}{2} - P_{y_4}^3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

reprezintă matricea necunoscutelor nodale, matricea de rigiditate a structurii și, respectiv, matricea încărcărilor nodale, numită și matricea termenilor liberi. În componența elementelor matricei încărcărilor nodale nu apar forțele interioare (eforturile), care s-au redus în timpul operațiilor efectuate.

Ecuția matriceală (27) constituie *modelul numeric global* cu elemente finite.

Din analiza componentelor ecuațiilor elementelor finite, componentelor ecuației structurii (27) și expresiei (19), se obțin următoarele dependențe:

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{e=e1}^3 [k^e] \\ [Q] &= \sum_{e=e1}^3 [q^e] \end{aligned} \quad (28)$$

Sumele din relațiile de mai sus nu se realizează respectând corespondența indicilor matriceali strict matematic, ci respectând corespondențele indicilor gradelor de libertate corespunzătoare nodurilor comune elementelor finite vecine. Din această cauză, operațiile din relațiile (28) se numesc operații de *asamblare*. În urma asamblării matricelor de rigiditate $[k^e]$ și a matricelor încărcărilor nodale $[q^e]$, cu $e = 1, 2, 3$, rezultă matricele:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} P_{g1}^1 - P \\ P_{g2}^1 - P_{g2}^2 \\ P_{g3}^2 - P_{g3}^3 \\ P_{g3}^4 - P_{y4}^3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

care sunt identice cu matricele (29) și, respectiv, (30).

În practica curentă a MEF, datorită simplității, pentru obținerea componentelor ecuației matriceale a structurii (matricea de rigiditate și matricea termenilor liberi), se folosește cea de-a doua metodă, a asamblării componentelor ecuațiilor matriceale ale elementelor finite (matricele de rigiditate și matricele încărcărilor nodale).

Modelul numeric global dat de relația (27) este un sistem algebric liniar de 4 ecuații cu 5 necunoscute, deplasărilor v_1, v_2, v_3, v_4 și reacțiunea P_{y4}^3 . Dar, în această formă matricea de rigiditate (matricea sistemului) este singulară, deoarece nu s-au luat în considerare legăturile structurii vecine (structura are mișcare generată de rigid).

Implementarea condiției limită de tip Dirichlet,

$$v_4 = 0 \quad (31)$$

datorită încastrării din nodul 4, se realizează prin eliminarea liniei și coloanei a patra – corespunzătoare gradului de libertate al acestei deplasări – din sistemul de ecuații (27). Astfel, acesta devine,

$$\begin{bmatrix} \frac{A^1 E}{y_2 - y_1} & -\frac{A^1 E}{y_2 - y_1} & 0 \\ -\frac{A^1 E}{y_2 - y_1} & \frac{A^1 E}{y_2 - y_1} + \frac{A^2 E}{y_3 - y_2} & -\frac{A^2 E}{y_3 - y_2} \\ 0 & -\frac{A^2 E}{y_3 - y_2} & \frac{A^2 E}{y_3 - y_2} + \frac{A^3 E}{y_4 - y_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A^1(y_2 - y_1)pg}{2} - P \\ \frac{-A^1(y_2 - y_1)pg}{2} - \frac{A^2(y_3 - y_2)pg}{2} \\ \frac{-A^2(y_3 - y_2)pg}{2} - \frac{A^3(y_4 - y_3)pg}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Rezolvarea modelului numeric

În urma rezolvării sistemului de ecuații (32), în acest caz fiind cu dimensiune foarte redusă, analitic clasic, rezultă necunoscutele nodale v_1, v_2, v_3 . Astfel, folosind relațiile (3), (7) și legea lui Hooke, se pot determina deplasările, deformațiile și tensiunile în domeniul structurii. În fig. 3 sunt reprezentate formele de variație ale câmpurilor aproximative ale deplasărilor și ale tensiunilor. Aceste variații sunt consecința directă a tipului de element finit, respectiv a funcțiilor de formă adoptate. Pentru îmbunătățirea aproximării, mai ales la nivelul tensiunilor, este necesară alegerea unor funcții de aproximare care aparțin clasei C^1 , deoarece $\sigma = E \varepsilon_z = E dv/dy$.

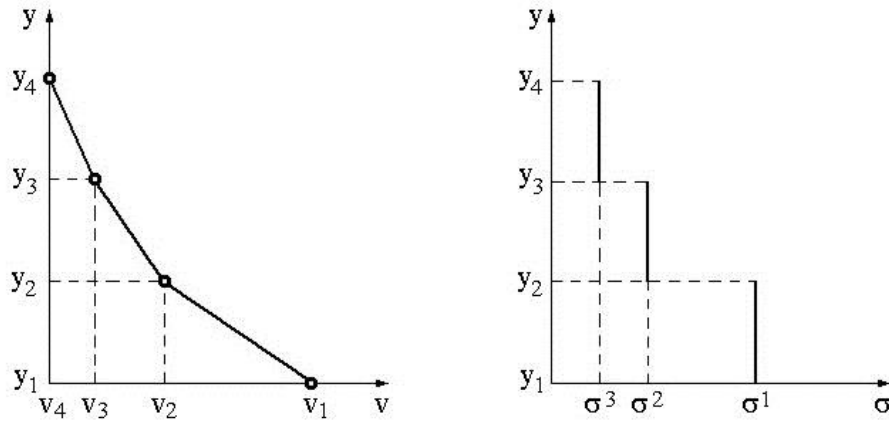


Fig. 3