

MEF-T.5.3

MODELAREA NUMERICĂ CU METODA REZIDUURILOR PONDERATE

CUPRINS

MEF-T.5.3.1 INTRODUCERE

MEF-T.5.3.2 ALGORITMUL GENERAL DE DEZVOLTARE A MODELELOR NUMERICE CU METODA REZIDUURILOR PONDERATE

MEF-T.5.3.1 INTRODUCERE

Deși prezintă unele avantaje metodologice, folosirea metodelor variaționale în construirea modelului numeric cu elemente finite nu poate fi generalizată, deoarece numai anumite clase de operatori admit formulări variaționale. Metoda reziduurilor ponderate este o metodă generalizată, cu ajutorul căreia se pot formula modelele numerice pentru probleme modelate analitic prin ecuații diferențiale liniare sau neliniare. Prin intermediul acestor metode, ecuațiile diferențiale se transformă în relații integrale, care la rândul lor pot fi prelucrate și variațional.

MEF-T.5.3.2 ALGORITMUL GENERAL DE DEZVOLTARE A MODELELOR NUMERICE CU METODA REZIDUURILOR PONDERATE

Ecuația de definire a unei probleme oarecare, dată de relația (2.106), pentru soluția aproximativă

$$\phi_a = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i, \quad (1)$$

cu N_i funcții de formă și ϕ_i valori nodale ale variabilei independente, nu este satisfăcută în mod exact. Deci, după înlocuire rezultă relația

$$L(\phi_a) + f_v = R, \quad (2)$$

în care R este reziduul, eroarea de calcul. Deoarece reziduul este nul, numai pentru soluția exactă, acesta poate fi considerat ca o măsură a erorii soluției aproximative (1) față de soluția exactă. Având în vedere că soluția exactă nu poate fi cunoscută, mărimea și distribuția reziduului R , în domeniul problemei V , pot fi folosite pentru evaluarea acurateții soluției aproximative propuse.

Metoda reziduurilor ponderate urmărește determinarea parametrilor ϕ_i astfel încât eroarea R , pe întreg domeniul problemei, să fie cât mai mică. Aceasta se obține prin formularea unei medii ponderate a erorii pe întreg domeniul, prin impunerea condiției

$$\int_V w_i (L(\phi_a) + f_v) dV = 0, \quad (3)$$

cu w_i un set de funcții pondere liniar independente, care se mai numesc și funcții de corecție. Funcțiile pondere, w_i , se aleg astfel încât ecuația integrală (3) să fie verificată simultan cu condițiile limită (2.108), de către soluțiile aproximative. Precizia soluției ϕ depinde de alegerea funcției pondere. Pentru determinarea funcțiilor pondere w_i , se pot utiliza mai multe metode, dintre care cele mai cunoscute sunt prezentate în continuare.

a. Metoda subdomeniilor, presupune funcții pondere de forma

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{pentru } V = V_k; \\ 0, & \text{pentru } V \neq V_k, \end{cases} \quad (4)$$

cu V_k subdomenii ale domeniului V .

b. Metoda celor mai mici pătrate propune determinarea funcțiilor pondere cu relația

$$w_i = \frac{\partial R(\phi_i)}{\partial \phi_i}, \quad (5)$$

pentru care expresia din partea stângă a relației (3) are un minim, deci

$$\int_V R^2 dV = 0. \quad (7)$$

c. Metoda Galerkin propune ca expresiile funcțiilor pondere să fie aceleași cu ale funcțiilor de formă, adică

$$w_i = N_i. \quad (8)$$

Metoda este folosită frecvent în obținerea modelelor numerice (aproximative) cu elemente finite, pentru multe probleme ingineresti, datorită adaptabilității și generalității acesteia, motive care justifică și folosirea în cadrul exemplurilor prezentate în continuare.

Soluțiile aproximative ϕ_a , date de relația (1), pot fi definite pe întreg domeniul V sau pe subdomenii (elemente finite) V^e , care respectă condițiile:

$$\begin{aligned} V^e &\subset V, \\ V &= \sum_{i=1}^m V^e. \end{aligned} \quad (9)$$

Metoda elementelor finite cu aproximarea parametrilor fizici pe subdomenii (elemente finite) cu funcțiile de aproximare $\phi_a = \phi_a(\phi_i)$, care au variabile independente valorile nodale necunoscute ϕ_i , cu $i = 1, 2, \dots, p$, numărul gradelor de libertate (parametrii necunoscuți) ale nodurilor se numește MEF nodală. Prin alegerea a p funcții pondere, sintetizate în matricea $[w] = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_p]^T$, ecuația integrală (3) se multiplică și astfel se formează următorul sistem de ecuații integrale:

$$\int_{V^e} [w]^T [L(\phi_a(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)) + f_v] dV = 0, \quad (10)$$

care după integrarea prin părți se transformă într-un sistem de ecuații

$$[k^e][\phi^e] = [q^e], \quad (11)$$

cu $[k^e]$ matricea de rigiditate a elementului finit; $[\phi^e] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p]^T$ matricea necunoscutelor nodale ale elementului finit și $[q^e]$ matricea termenilor liberi sau a încărcărilor nodale.

Ținând cont de relațiile (10), ecuația integrală a reziduurilor ponderate, pentru domeniul problemei, este

$$\sum_{e=1}^m \int_{V^e} [w]_{i,p}^T [L(\phi_a(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)) + f_v] dV = \int_V [w]_{i,n}^T [L(\phi_a(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)) + f_v] dV = 0, \quad (12)$$

în care m este numărul elementelor finite și n numărul total al gradelor de libertate (necunoscutele) nodale din volumul V .

Prin explicitarea integralei din partea a doua a relației (1), se obține un sistem de n ecuații, de forma

$$[K][\Phi] = [Q], \quad (13)$$

în care, ținând cont de prima parte a relației (1),

$$[K] = \sum_{e=1}^m [k^e] \quad (14)$$

este matricea de rigiditate corespunzătoare domeniului problemei,

$$[Q] = \sum_{e=1}^m [q^e] \quad (15)$$

matricea termenilor liberi și $[\Phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p]^T$ matricea necunoscutele nodale.

Similar cu algoritmul de asamblare din cadrul metodei variaționale, sumele din relațiile (14) și (15) se realizează ținând cont de corespondențele nodurilor elementelor finite vecine.

Pentru urmărirea pas cu pas a etapelor metodei reziduurilor ponderate, prezentată în principiu mai sus, în continuare acestea se particularizează pentru ecuația diferențială cu derivate parțiale a lui Poisson.

Ecuația integrală a reziduurilor ponderate (3), caracteristică ecuației lui Poisson, este

$$\int_V w(x, y) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + f_v \right) dV = 0, \quad (16)$$

în care ϕ sunt funcții de clasa C^2 , care satisfac condițiile limită. Domeniul problemei este de tip placă cu suprafața A și grosimea h , deci $dV = h dx dy$.

Folosind formula,

$$\int_A w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = - \int_A \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \oint w \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad (17)$$

ecuația integrală (16) devine,

$$\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - w f_v \right) dx dy + \int_{S_1} w \frac{\partial \phi}{\partial n} dx dy + \int_{S_2} w \frac{\partial \phi}{\partial n} dx dy = 0. \quad (18)$$

Printr-o alegere adecvată a funcției pondere w și eliminând ultima integrală, consecință a verificării condițiilor limite (5.7), relația (5.200) devine,

$$\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - w f_v \right) dx dy + \int_{S_1} w \frac{\partial \phi}{\partial n} dx dy = 0, \quad (19)$$

unde $\phi = \phi_s$ și $w = 0$, pentru $(x, y) \in S_2$.

Se observă că în urma procesului de integrare prin părți, o formă integrală dată trece într-o așa numită formă integrală slabă, cu ordinul derivatelor funcțiilor ϕ scăzut. Aceasta conduce la relaxarea condițiilor de continuitate, necesare pentru asigurarea convergenței aproximării, iar unele condiții limită nu necesită satisfacerea completă. Pe de altă parte, integrarea prin părți introduce derivatele funcțiilor de pondere w , care au condiții de continuitate mai severe decât funcțiile ϕ .

Considerând că parametrul necunoscut ϕ al ecuației diferențiale Poisson este aproximat cu relația (1), în care pentru elementul finit oarecare e, funcțiile de formă au proprietatea,

$$N_j(x_j, y_j) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i \neq j; \\ 1, & \text{pentru } i = j \end{cases} \quad (20)$$

și adoptând, conform metodei Galerkin, funcțiile pondere $w_i = N_j$, forma integrală (19) devine

$$\int_{A^0} \left[\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] [\phi_i] dx dy - \int_{A^0} f_v [N_j] dx dy + \int_{S^0 \subset S_1} f_s [N_j] dx dy = 0, \quad (21)$$

cu $i, j = 1, 2, \dots, p$. Condițiile limită se consideră în această relație prin varianta Neuman ($\alpha = 0$).

În forma sintetică, relația (21), care reprezintă modelul numeric echivalent al elementului finit, se poate scrie sub forma ecuației elementului finit e ($[k^e] [d] = [q^e]$), în care

$$[k^e] = \int_{A^0} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy \quad (22)$$

este, matricea de rigiditate a elementului finit, iar

$$[q^e] = \int_{A^0} f_v [N_j] dx dy - \int_{S^0 \subset S_1} f_s [N_j] dx dy \quad (23)$$

este matricea termenilor liberi. Expresiile (22) și (23) se pot calcula pentru toate elementele finite ale structurii.

Prin asamblarea matricelor de rigiditate și a matricelor termenilor liberi, se obține modelul numeric al problemei cu forma dată de relația (2).

Pentru evidențierea la nivel de detaliu a etapelor algoritmului metodei reziduurilor ponderate, în capitolele următoare se vor prezenta aplicații ingineresti concrete.