

# MEF-T.5.2

## MODELAREA NUMERICĂ CU METODA VARIAȚIONALĂ

### CUPRINS

#### MEF-T.5.2.1 INTRODUCERE

#### MEF-T.5.2.2 ASPECTE PRIVIND OBTINEREA FUNCȚIONALEI

#### MEF-T.5.2.3 ALGORITMUL GENERAL DE DEZVOLTARE A MODELELOR NUMERICE CU METODA VARIAȚIONALĂ

#### MEF-T.5.2.1 INTRODUCERE

Abordarea variațională în vederea modelării numerice cu elemente finite presupune cunoașterea funcționalei specifice fenomenului fizic al problemei. Determinarea funcționalei poate fi realizată pe două căi: prima – plecând de la ecuațiile diferențiale care modelează fenomenul analizat și a doua – plecând de la teoremele energetice care guvernează fenomenul.

#### MEF-T.5.2.2 ASPECTE PRIVIND OBTINEREA FUNCȚIONALELOR

Obținerea unei funcționale, plecând de la ecuațiile diferențiale pe domeniul  $V$  și condițiilor inițiale și/sau limită, presupune căutarea unei integrale  $I(\phi)$  a cărei variație de ordinul întâi, în raport cu  $\phi$ , să respecte condiția

$$\delta I(\phi) = 0, \quad (1)$$

adică să aibă extrem sau să fie staționară. Pornind de la expresia

$$\int_V \delta \phi (L(\phi) + f_V) dV = 0, \quad (2)$$

prin transformări, de regulă integrând prin părți, se poate obține relația

$$\delta \int_V (L^*(\phi) + f_V^*) dV = 0, \quad (3)$$

în care  $L^*$  și  $f_V^*$  sunt operatori, obținuți în urma transformărilor pe baza operatorilor originali  $L$  și, respectiv,  $f_V$ . Comparând relațiile (1) și (3), rezultă

$$I(\phi) = \int_V (L^*(\phi) + f_V^*) dV. \quad (4)$$

Nu există reguli generale pentru obținerea funcționalei pornind de la ecuațiile guvernatoare.

În cele ce urmează se exemplifică algoritmul de mai sus pentru cazul ecuației cu derivate parțiale de tip Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + f_V = 0,$$

pe domeniul  $V$  (fig. 1), cu condițiile limită de tip Dirichlet

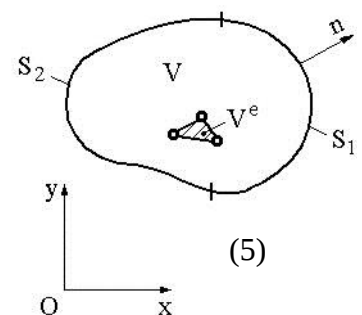


Fig. 1

$$\phi = \phi_S, \quad (6)$$

pentru  $S = S_2$  și, respectiv, de tip Cauchy

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \alpha \phi = f_S, \quad (7)$$

pentru  $S = S_2$ . Dacă  $\alpha = 0$ , condițiile limită se numesc de tip neuman. Această ecuație se întâlnește în aplicațiile tehnice pentru modelarea fenomenelor fizice care apar la torsiunea barelor prismatice, la transmiterea căldurii etc.

Comparând ecuațiile de guvernare de mai sus, cu forma generală, rezultă următoarele forme pentru operatorii diferențiali:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$C = \frac{\partial}{\partial n} + \alpha. \quad (8)$$

Forma integrală caracteristică ecuației Poisson, conform relației (2), este

$$\int_V \delta \phi \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + f_V \right) dV = 0, \quad (9)$$

unde  $\phi$  este o funcție de clasa  $C^2$ , care satisface condițiile limită (6) și (7).

După integrarea prin părți a expresiei (9), ținând cont de proprietățile (1.133), rezultă

$$\int_V \left( \frac{\partial(\delta \phi)}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial(\delta \phi)}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \delta \phi f_V \right) dV + \int_{S_1} \delta \phi (\alpha \phi - f_S) dS = 0. \quad (10)$$

Reaplicând proprietățile operațiilor variaționale, această expresie se poate scrie sub forma,

$$I(\phi) = \int_V \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\phi)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \phi f_V \right) dV + \int_{S_1} \left( \frac{1}{2} \alpha \phi^2 - \phi f_S \right) dS = 0 \quad (11)$$

care reprezintă funcționala corespunzătoare ecuației Poisson.

Obținerea funcționalei caracteristice, corespunzătoare unui fenomen fizic, se poate realiza și fără cunoașterea ecuațiilor diferențiale, folosind teoremele energetice. În mecanica structurilor, funcționala reprezintă energia potențială totală a sistemului.

Din analiza mai multor tipuri de fenomene fizice se contată că nu se pot stabili reguli generale pentru obținerea expresiei funcționalei. În plus, este posibilă situația imposibilității descrierii unei funcționale caracteristice și deci nu se poate aplica metoda variațională pentru obținerea modelului numeric.

### MEF-T.5.2.3 ALGORITMUL GENERAL DE DEZVOLTARE A MODELELOR NUMERICE CU METODA VARIAȚIONALĂ

Formularea variațională, folosită în scopul obținerii unor soluții aproximative a modelelor analitice, a fost utilizată înainte de dezvoltarea MEF, de metoda Rayleigh-Ritz. Principiul acestei metode se aplică și în cazul MEF, dar nu pentru întregul domeniu al problemei ci pentru fiecare subdomeniu (element finit) al acestuia.

Pentru un element finit al domeniului, funcționala (4) se poate exprima astfel,

$$I^e(\phi_j) = I^e(\phi_a(\phi_j)), \quad (12)$$

unde  $\phi_j$ , cu  $j = 1, 2, \dots, p$ , sunt parametri fizici nodali (grade de libertate) al elementului finit e și  $\phi_a(\phi_j)$  – funcția de aproximare a câmpului descris de funcția  $\phi$ .

Principiul variațional, aplicat elementului finit, permite determinarea dintre toate funcțiile admisibile  $\phi$ , care satisfac ecuațiile de guvernare pe domeniul  $V^e$  și condițiile limită, a acelor funcții care fac staționară funcționala, prin relația

$$\delta I^e(\phi_j) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial I^e(\phi_j)}{\partial \phi_j} \delta \phi_j. \quad (13)$$

Deoarece variațiile  $\delta \phi_j$  sunt nenule, din (13) rezultă sistemul de ecuații algebrice

$$\frac{\partial I^e(\phi_j)}{\partial \phi_j} = 0, \quad (14)$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$[k^e][\phi^e] = [q^e], \quad (15)$$

cu:  $[k^e]$  – matricea de ordinul  $p$ , numită *matrice de rigiditate* a elementului finit;  $[\phi^e] = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_p]^T$  – matricea necunoscutelor corespunzătoare gradelor de libertate nodale ale elementului finit;  $[q^e]$  – matricea termenilor liberi. Deoarece MEF a fost aplicată practic, prima dată pentru probleme de mecanica solidului deformabil, denumirea de matrice de rigiditate s-a consacrat și pentru alte tipuri de probleme. Sistemul de ecuații algebrice (15) reprezintă modelul numeric care sintetizează comportarea elementului finit.

Ținând cont că suma volumelor  $V^e$  ale celor  $m$  elemente finite este egală cu volumul  $V$  al domeniului problemei și deci și suma integralelor de forma (4), pentru elementele finite, este egală cu integrala pe volumul  $V$  a sumei integranților, funcționala întregului este dată de relația,

$$I(\phi_i) = \sum_{k=1}^m I^e(\phi_j), \quad (16)$$

în care,  $\phi_i$  cu  $i = 1, 2, \dots, n$ , sunt necunoscutele nodale corespunzătoare domeniului problemei.

Similar, ca în cazul elementului finit, aplicând principiul variațional funcționalei (16), rezultă sistemul algebric (modelul numeric) al problemei,

$$\frac{\partial I(\phi_i)}{\partial \phi_i} = 0, \quad (17)$$

care se mai poate scrie și sub forma,

$$[K][\Phi] = [Q], \quad (18)$$

cu:  $[K]$  – matricea de rigiditate a structurii;  $[\Phi] = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n]^T$  – matricea necunoscutelor corespunzătoare gradelor de libertate nodale ale problemei;  $[Q]$  – matricea termenilor liberi, de asemenea corespunzător gradelor de libertate nodale.

Matricele  $[K]$  și  $[Q]$  se pot obține și prin asamblarea matricelor elementelor finite  $[k^e]$  și  $[q^e]$ , procedeu care presupune însumarea elementelor acestor matrice ținând cont de gradele de libertate și nodurile comune elementelor finite adiacente.

Deoarece din punct de vedere formal algoritmul de mai sus este diferit de la o problemă la alta, în capitolele următoare se vor prezenta exemple concrete din domeniul structurilor mecanice elastice.

Metoda variațională de obținere a modelului numeric al elementului finit, din punctul de vedere al soluționării aproximative a modelului real al problemei, prezintă însă următoarele avantaje [Băneț, 1981; Grandin, 1986]:

- funcționala conține derivate de ordin inferior celor din modelul analitic bazat pe ecuații diferențiale și, în consecință, poate folosi o clasă de funcții mai largă pentru aproximare;
- problema poate admite două variaționale complementare (una care conduce la maxim și cealaltă la minim), astfel rezultând marginile domeniului de aproximare a soluției;
- demonstrarea existenței unei soluții este uneori mai facilă.

Problemele de analiza statică a structurilor mecanice deformabile se pot rezolva cu MEF pornind de la teoremele (principiile) variaționale energetice, dintre care cele mai utilizate sunt: teorema energiei potențiale minime, exprimată în funcție de deplasări; teorema energiei complementare minime, exprimată în funcție de tensiuni și teorema Hellinger-Reissner, exprimată în funcție de deplasări și tensiuni (formulare mixtă).