

MEF-T.5.1

METODE DE APROXIMARE A MODELELOR ANALITICE

CUPRINS

MEF-T.5.1.1 INTRODUCERE

MEF-T.5.2.2 METODE DE APROXIMARE A MODELELOR DIFERENȚIALE

MEF-T.5.1.1 INTRODUCERE

Modele matematice asociate fenomenelor fizice de rezolvat, conțin o funcție necunoscută, $\phi(x)$, pentru probleme unidimensionale, $\phi(x, y)$, pentru probleme bidimensionale sau $\phi(x, y, z)$, pentru probleme tridimensionale. Această funcție definește la un moment dat modul de variație al unui parametru fizic necunoscut în raport cu coordonatele x, y, z ale punctelor domeniului problemei de rezolvat. Pentru multe probleme practice este imposibilă determinarea soluției exacte, a expresiei explicite pentru ϕ , care să satisfacă simultan ecuațiile diferențiale guvernatoare și condițiile inițiale și limită. În aceste cazuri este posibilă găsirea unei soluții aproximative, care să satisfacă cu abateri controlate ecuațiile guvernatoare și condițiile inițiale și limită.

MEF-T.5.2.2 METODE DE APROXIMARE A MODELELOR DIFERENȚIALE

Rezolvarea aproximativă a modelului matematic general, folosind MEF, presupune câteva precizări legate de metodele aproximative de rezolvare a ecuațiilor diferențiale.

Algoritmul de determinare a soluțiilor aproximative ale modelului matematic poate avea la bază *procedeele soluției de încercare* cu următoarele trei etape principale:

a. Construcția (întocmirea) soluției de încercare. Această etapă presupune conceperea, pentru modelul matematic, a unei soluții aproximative, de forma,

$$\phi_a(x) = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x), \quad (1)$$

unde x reprezintă variabila independentă. Funcțiile $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sunt funcții liniar independente, cunoscute, numite *funcții de încercare* [Burnett, 1985]. Expresiile acestor funcții trebuie să fie cât se poate de simple, în vederea evaluării și prelucrării ușoare. Frecvent se întâlnesc expresii polinomiale sau trigonometrice. Coeficienții $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt parametri necunoscuți, de regulă numiți *coordonate generalizate*.

b. Aplicarea unui criteriu de optimizare. Scopul acestei etape este determinarea valorilor parametrilor $a_1, a_2, \dots, a_n$, astfel încât abaterile soluției aproximative propusă, față de soluția exactă, să fie minime. În acest sens, există două grupe de criterii de optimizare:

i. Metodele reziduurilor ponderate, care realizează minimizarea abaterilor soluției aproximative pornind de la ecuațiile diferențiale; în acest scop, în practică se întâlnesc frecvent metodele: *colocației*, *subdomeniului*, celor mai mici pătrate și *metoda Galerkin*.

În cazul ultimei metode, pentru minimizarea abaterilor se impune ca pentru fiecare parametru a_i ponderea medie a reziduurilor, $R(x, a_i)$, pe întreg domeniul variabilei independente $[x_1, x_2]$, să fie nulă. Funcțiile pondere sunt chiar funcțiile de încercare $\varphi_i(x)$ asociate parametrilor a_i . Astfel, sub formă matematică metoda Galerkin presupune rezolvarea sistemului de ecuații:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_1}^{x_2} R(x, a_i) \varphi_1(x) dx = 0, \\ \int_{x_1}^{x_2} R(x, a_i) \varphi_2(x) dx = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \int_{x_1}^{x_2} R(x, a_i) \varphi_n(x) dx = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Având în vedere faptul că această metodă este folosită și de MEF, aplicarea efectivă a acesteia se va exemplifica în capitolul

ii. Metoda variațională Rayleigh-Ritz este aplicată fenomenelor fizice pentru care se poate determina o funcțională (funcție de alte funcții). De exemplu, în cazul structurilor mecanice elastice, funcționala este energia potențială totală. Această metodă urmărește să realizeze extremul funcționalei, în care funcția necunoscută este înlocuită cu soluția de încercare (aproximativă). Pentru sugestivitate, se consideră exemplul funcționalei de forma,

$$\Pi = \int_a^b f\left(x, \phi(x), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}\right) dx, \quad (3)$$

în condiții limită date. Înlocuind în relația (3) funcția necunoscută $\phi(x)$ cu soluția de încercare $\phi_a(x)$, dată de relația (1), se obține relația

$$\Pi = \int_a^b f\left(x, \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}\right) dx, \quad (4)$$

care după integrare ia forma

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (5)$$

Condiția matematică de extrem a funcționalei

$$d\Pi = 0, \quad (6)$$

pentru forma dată de relația (5), este

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} da_n = 0. \quad (7)$$

Deoarece parametrii $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt independenți, nenuli, rezultă sistemul de ecuații

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad (8)$$

cu $i = 1, 2, \dots, n$.

Astfel, în urma rezolvării acestui sistem de ecuații liniare, se obțin parametrii a_i , cu $i = 1, 2, \dots, n$ și deci soluția aproximativă a problemei de rezolvat.

Metodele Rayleigh-Ritz și Galerkin conduc întotdeauna la soluții identice, când se folosesc aceleași funcții de încercare [Forray, 1975].

c. Calculul preciziei. Precizia de aproximare a soluției de încercare față de soluția exactă se poate cuantifica cu ajutorul erorii $E(x)$, dată de relația,

$$E(x) = \phi(x) - \phi_a(x). \quad (9)$$

Pentru calculul și estimarea erorilor sunt posibile mai multe metode, asupra cărora, datorită complexității, nu se va insista în cadrul acestei lucrări.

Algoritmul de rezolvare a modelului matematic, având la bază cele trei etape de mai sus, este prezentat în fig. 1. dacă eroarea de aproximare a soluției exacte este mai mare decât cea acceptabilă, este necesară întoarcerea la prima etapă și construirea unei soluții de încercare, cu alte funcții de încercare și cu un număr mai mare de coordonate generalizate. Calea cea mai ușoară de micșorare a erorii se poate realiza prin adăugarea la soluția de încercare, prin combinare liniară, de noi funcții de încercare.

Deci, metodele aproximative de rezolvare a modelului matematic asociat unui sistem fizic transformă modelul guvernat de ecuații diferențiale, de regulă nerezolvabil pentru cazul general, într-un model aproximativ echivalent, rezolvabil algebric.

MEF este, de asemenea, o metodă aproximativă de rezolvare a ecuațiilor diferențiale, dar spre deosebire de metodele prezentate mai sus soluția de încercare (aproximativă) nu se consideră pentru întreg domeniul problemei ci succesiv pentru subdomenii (elemente finite) ale domeniului problemei. Deci, preliminar este necesară operația de discretizare a domeniului problemei. Soluția de încercare are la bază, de regulă, combinații liniare de polinoame cu proprietăți speciale pe frontiera elementului finit, care conferă avantaje de calcul, în cazul lucrului cu mai multe elemente finite.

Sistemele de ecuații obținute pentru elementele finite ale domeniului pot fi combinate în vederea obținerii sistemului de ecuații liniare, corespunzătoare întregului domeniu al problemei.

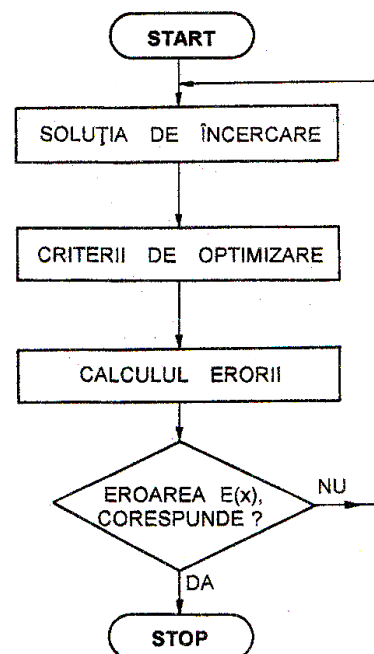


Fig. 1