

MEF-T.4.2

PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR DE APROXIMARE

CUPRINS

MEF-T.4.2.1 INTRODUCERE

MEF-T.4.2.2 CONTINUITATEA

MEF-T.4.2.3 COMPATIBILITATEA (CONFORMITATEA)

MEF-T.4.2.4 COMPLINIREA

MEF-T.4.2.5 INVARIANTA

MEF-T.4.2.6 TRANSFORMABILITATEA

MEF-T.4.2.1 INTRODUCERE

Metoda elementelor finite este o metodă aproximativă, care presupune atât aproximarea, prin discretizare a domeniului problemei, cât și aproximarea câmpului parametrului fizic, necunoscut. Dimensiunile elementelor finite și numărul acestora trebuie alese astfel încât să se obțină o diferență (eroare) minimă între soluția aproximativă ϕ_a și cea exactă ϕ a problemei date. Procesul apropierei de soluția exactă cu creșterea numărului de elemente finite se numește **convergență**. La limită, dacă elementele finite devin infinit de mici, s-ar obține soluția exactă. Aproximarea de soluția exactă se poate face prin valori superioare sau valori inferioare valorii exacte (fig. 1). Se observă că există un anumit număr de elemente finite, N_e , dincolo de care mărirea numărului acestora nu realizează o creștere semnificativă a convergenței, care să justifice efortul de calcul suplimentar. Există o margine superioară M , sau o margine inferioară m , a soluției spre care tinde procesul de convergență.

În plus, procesul de convergență este influențat și de funcțiile de aproximare a câmpului parametrului fizic, atașate elementului finit ales. Pentru ca procesul de convergență să devină riguros, funcțiile de aproximare a câmpului parametrului fizic trebuie să satisfacă următoarele cerințe: continuitate, compatibilitate (conformitate), complinire, invarianță și transformabilitate.

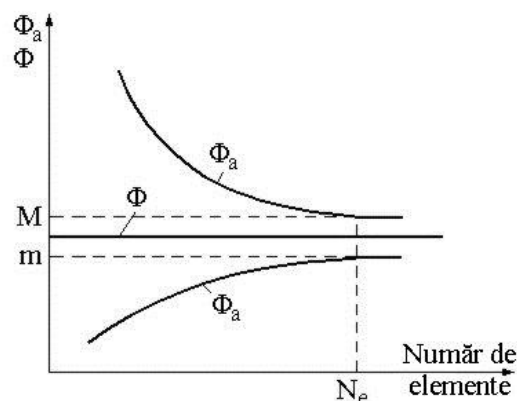


Fig. 1

MEF-T.4.2.2 CONTINUITATEA

Continuitatea funcțiilor de aproximare asigură variații line ale câmpului parametrului fizic necunoscut, în interiorul și pe frontiera domeniului elementului finit. Funcția de interpolare trebuie astfel aleasă încât printr-o adoptare adecvată a parametrilor fizici nodali ($\{\phi\}$), să se poată obține valori constante ale parametrului fizic și derivatele acestuia, care apar în expresia funcționalei, atunci când dimensiunile elementului finit tind la zero [Munteanu, 1979].

Funcțiile de aproximare polinomiale, analizate în acest capitol și în capitolul precedent, satisfac condițiile de continuitate în orice punct din interiorul elementului finit.

De importanță deosebită pentru procesul de convergență al metodei este continuitatea funcțiilor de aproximare pe frontierele domeniilor elementelor finite. Convergența MEF este asigurată dacă funcția de aproximare și toate derivatele acesteia, până la cele cu un ordin mai mic decât cel mai mare ordin care apare în funcționala problemei, sunt continue la traversarea granițelor dintre elemente.

Continuitatea funcției de aproximare în zonele de frontieră dintre elementele finite se apreciază prin clasa de continuitate a funcției respective. Se consideră funcția de aproximare aparține clasei m , notată cu C^m , dacă funcția și derivatele acesteia până la ordinul m sunt continue.

Funcția de aproximare reprezentată în fig. 2 aparține clasei C^0 , deoarece respectă continuitatea funcției în nodurile de legătură ale elementelor finite și derivata de ordinul întâi a acesteia este discontinuă. În fig. 3 este reprezentată grafic o funcție de aproximare de clasa C^1 , cu respectarea continuității în zona interelementară a funcției și derivatei întâi a acesteia.

Din punct de vedere al clasei de continuitate, convergența este mai rapidă cu cât clasa de continuitate este mai mare. Aceasta se realizează cu prețul complicării elementului finit și creșterii numărului de necunoscute nodale ale elementului finit.

Adoptarea clasei de continuitate adecvată pentru problema de rezolvat se realizează, de regulă, luând în considerare particularitățile concrete ale problemei. De exemplu, dacă elementul finit folosit pentru rezolvarea unei probleme de teoria elasticității este conceput ca în noduri să aibă numai grade de libertate de translație, atunci este suficient ca funcțiile de aproximare a deplasărilor (parametrului fizic) u , v și w să aparțină clasei C^0 . În cazul în care structura are și rotații nodale (plăci sau bare solicitate la încovoiere), este necesar ca și derivatele deplasărilor să fie continue, deci funcțiile de aproximare să aparțină clasei C^1 de aproximare a deplasărilor (parametrul fizic) u , v și w să aparțină C^0 . În cazul în care structura are și rotații nodale (plăci sau bare solicitate la încovoiere), este necesar ca și derivatele deplasărilor să fie continue, deci funcțiile de aproximare să aparțină clasei C^1 .

MEF-T.4.2.3 COMPATIBILITATEA (CONFORMITATEA)

Elementele finite adiacente din interiorul domeniului unei probleme de rezolvat trebuie să fie compatibile. Aceasta implică ca în timpul modificării domeniului problemei, consecință a evoluției fenomenelor fizice, elementele finite trebuie să rămână solidare de-a lungul frontierei comune fără a se separa, a se crea discontinuități sau a se produce escaladarea domeniului elementului vecin. În cazul domeniilor de tip linie, această cerință este realizabilă, deoarece elementele finite unidimensionale au ca frontieră punctele nodale. Compatibilitatea este mai greu de realizat în cadrul elementelor finite bidimensionale sau tridimensionale, când frontiera dintre elementele finite adiacente este reprezentată de linii nodale și, respectiv, suprafețe nodale. Pentru a satisface cerința de compatibilitate, elementele finite adiacente trebuie să aibă pe suprafața sau linia nodală comună aceleași coordonate pentru noduri, același număr și valori pentru parametri fizici necunoscuți (grade de libertate) și aceleași funcții de aproximare a câmpurilor parametrilor fizici necunoscuți. Mai mult, pe frontiera comună valorile funcțiilor de aproximare trebuie să fie dependente numai de necunoscutele asociate nodurilor de pe acea frontieră. În fig. 4 se prezintă exemple de elemente finite compatibile (fig. 4, a) și incompatibile (fig. 4, b).

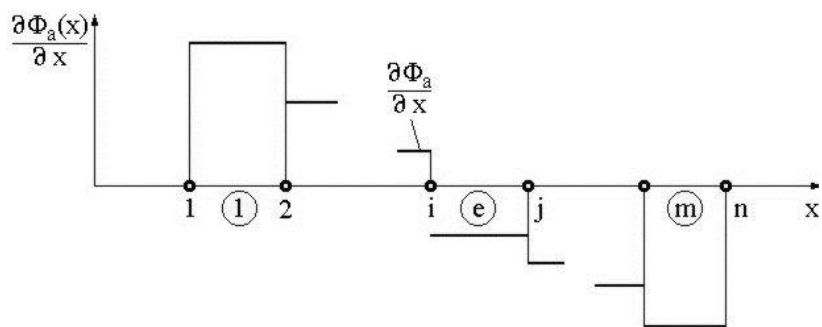


Fig. 2

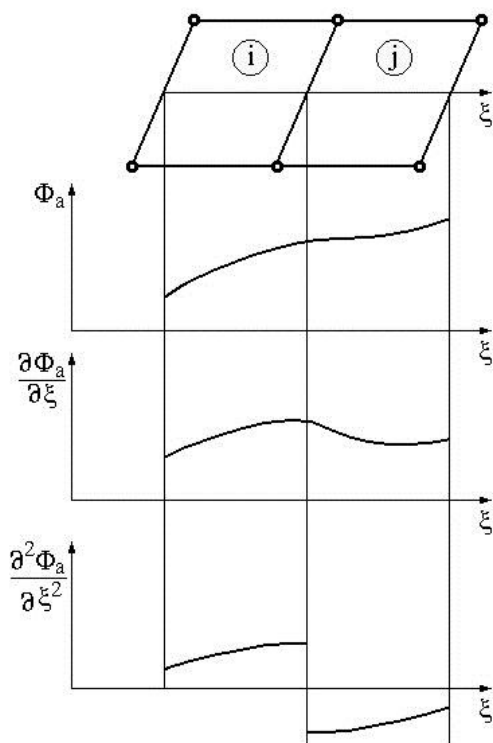


Fig. 3

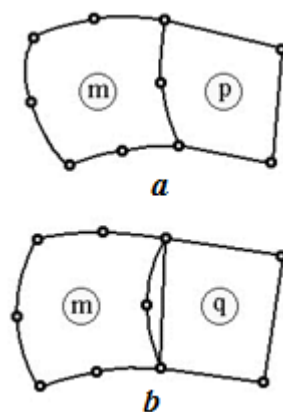


Fig. 4

MEF-T.4.2.4 COMPLINIREA

O funcție de aproximare de tip polinomială de gradul p este completă dacă conține toate puterile de la zero (termenul constant) până la p inclusiv. De exemplu, funcția de aproximare cubică este completă dacă are zece termeni și are forma,

$$\phi_a(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^3 + a_{10}\eta^3 \quad (1)$$

Renunțarea la doi termeni, de ex. ξ^3 și în η^3 , se face în scopul realizării unui element finit pătratic (parabolic), care permite obținerea unor funcții de formă cu expresii simplificate. Problema care se pune în acest caz este de a se găsi cei mai potriviți termeni de eliminat, astfel încât convergența să fie mai rapidă. Din cele 45 de variante posibile, se preferă 6 variante, care presupun eliminarea a unei perechi de termeni din ultimii patru. Este recomandabil să se elimine termenii simetrici, astfel încât influența celor două coordonate asupra parametrului fizic aproximat să fie egală, realizându-se în acest fel și proprietatea care va fi analizată în continuare.

MEF-T.4.2.5 INVARIANȚA

Proprietatea elementului finit de a avea aceeași stare modificată (deformată), indiferent de orientarea axelor locale în raport de care această modificare este formulată, se numește **invarianță geometrică** sau izotropie geometrică. Această proprietate este cerută de faptul că modelarea se realizează folosind un sistem de coordonate global cu orientare spațială fixă, la care se raportează intrările în sistem și fiecare element finit are propria orientare (sistemul de coordonate local), care se modifică de la un element finit la altul.

Realizarea invarianței se poate obține prin alegerea adecvată a termenilor de eliminat din funcția de aproximație completă, pentru realizarea funcției de aproximare cu numărul de termeni în corespondență cu numărul de grade de libertate (necunoscute), corespunzătoare elementului finit considerat. Astfel, în cazul funcției de aproximare (1), se putea opta pentru unul din termenii ξ^2, η^2 sau $\xi\eta$. Se poate alege varianta de eliminare a termenilor în ξ^2 și η^2 , deoarece funcția de aproximare cu termenul în $\xi\eta$ nu favorizează prin transformări, modificarea (deformația) pe nici una din cele două direcții ξ sau η . Dacă s-ar fi optat pentru menținerea termenului ξ^2 sau η^2 , în locul termenului în $\xi\eta$ ar fi fost favorizate, din punct de vedere precizie, elementele matriceale asociate direcției ξ respectiv η .

MEF-T.4.2.6 TRANSFORMABILITATEA

În cadrul modelărilor prezentate, apare frecvent problema coexistenței a două sisteme de coordonate de referință, sistemul de coordonate local, asociat de obicei elementelor finite, față de care se exprimă funcțiile de formă N_i și sistemul de coordonate global, față de care se definesc variabilele de câmp ce trebuie determinate aproximativ. În general, pentru calculul expresiilor corespunzătoare elementelor finite, după cum se va vedea în capitolele următoare, este necesar să se calculeze termeni de forma,

$$\int_{V^e} f\left(\phi_a, \frac{\partial \phi_a}{\partial x}, \frac{\partial \phi_a}{\partial y}\right) dx dy, \quad (2)$$

cu V^e domeniul bidimensional al elementului finit. Funcțiile de aproximare ϕ_a sunt descrise, de regulă, în coordonatele locale ξ -naturale, cu relații de forma,

$$\phi_a = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \phi_i, \quad (3)$$

unde n este numărul necunoscutelor nodale atașate nodurilor elementului finit.

Pentru calculul expresiei (2), este necesar a se exprima derivatele parțiale $\partial \phi_a / \partial x, \partial \phi_a / \partial y$ și a ariei $dA = dx dy$, în funcție de coordonatele ξ și η . Calculul acestor derivate parțiale, date de relațiile:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_a}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i, \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial y} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i,\end{aligned}\tag{4}$$

impune determinarea derivatelor $\partial N_i / \partial x$ și $\partial N_i / \partial y$. Deoarece $x = x(\xi, \eta)$ și $y = y(\xi, \eta)$, conform modelării geometrice, se pot scrie expresiile:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{5}$$

sau sub formă matriceală

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix},\tag{6}$$

unde s-a notat cu

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\tag{7}$$

matricea Jacobi a transformării de coordonate.

Din ecuația (6), rezultă

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix},\tag{8}$$

Determinarea inversei matricei Jacobi de transformare, $[J]^{-1}$, presupune nesingularitatea acesteia, deci:

$$|J| \neq 0\tag{9}$$

Existența matricei $[J]^{-1}$, pentru fiecare element în parte, arată biunivocitatea transformărilor de coordonate.

Expresia jacobianului este influențată de tipul elementului de referință, funcția de formă corespunzătoare și de coordonatele globale ale nodurilor elementului finit oarecare al domeniului. În continuare, se exemplifică aceste dependențe pentru elementul finit unidimensional e din fig. 5.

Folosind elementul de referință trinodal, în coordonate ξ -naturale și relația de transformare, expresia matricei Jacobi (7) degenerază și devine

$$J^e(\xi) = \frac{dx}{d\xi} = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)x_i - 2\xi x_k + \left(\xi + \frac{1}{2}\right)x_j\tag{10}$$

Notând $x_j - x_i = L$ și $x_k - x_i = L/p$, cu $p > 2$, această relație devine,

$$J^e(\xi) = L \left(1 - \frac{2}{p} \right) \xi + \frac{L}{2} \quad (11)$$

Condiția (9), în acest caz, implică

$$\xi \neq \frac{-p}{2(p-2)} \quad (12)$$

Deoarece $\xi \in [-1, 1]$, se va urmări ca expresia din partea dreaptă a condiției (12) să ia valori în afara intervalului de definiție $[-1, 1]$. Această situație apare când factorul p , care cuantifică poziția nodului secundar k între nodurile primare i și j (fig. 4.10), respectă condițiile: $2 < p < 4$. Dacă $p > 4$, jacobianul se anulează pentru una din valorile variabilei ξ din domeniul de definiție și deci transformarea de coordonate este imposibilă. Astfel, de exemplu, când $p = 8$, rezultă $\xi = -2/3$. În fig. 6 se prezintă grafic variațiile funcțiilor de formă pentru acest caz, când acestea iau valori inacceptabile pentru valori ale variabilei independente din domeniul de definiție al acestuia [Burnett, 1985].

Frecvent MEF, pentru realizarea de variații ale variabilelor dependente în concordanță cu variațiile variabilelor independente (creșterile, descreșterile sunt consecință a creșterilor, respectiv descreșterilor), presupune condiția

$$J^e(\xi) > 0, \quad (13)$$

pentru $\xi \in [-1, 1]$.

Deci, discretizarea domeniului problemei în elemente finite nu se face întâmplător, ci cu adoptarea pozițiilor relative adecvate ale nodurilor, în vederea evitării elementelor finite **distorsionate**, de exemplu cele din fig. 7, a, b.

Pentru calculul ariei elementare $dx dy$, se pornește de la elementul finit plan de grosime constantă h din fig. 8, raportat la cele două sisteme de coordonate. Volumul elementar în raport cu sistemul de coordonate global se poate calcula vectorial, ca produs mixt,

$$dV = (dx \vec{i} \times dy \vec{j}) h \vec{k} \quad (14)$$

sau

$$dV = \begin{vmatrix} 0 & 0 & h \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \end{vmatrix} = h dx dy \quad (15)$$

Deoarece $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ și ținând cont de fig. 8, se poate scrie

$$\begin{aligned} d\vec{\xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \vec{j}, \\ d\vec{\eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \vec{j} \end{aligned} \quad (16)$$

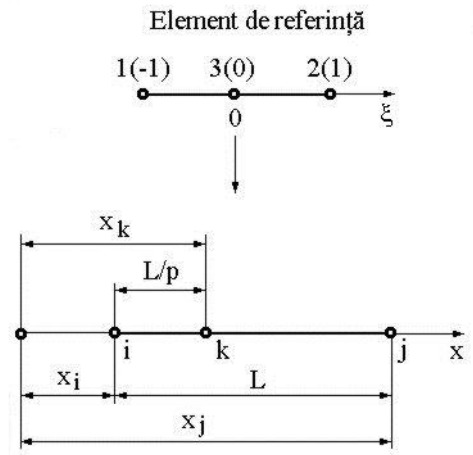


Fig. 5

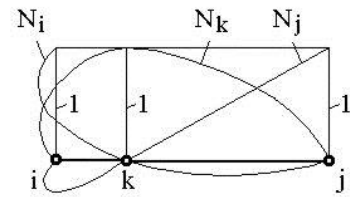


Fig. 6

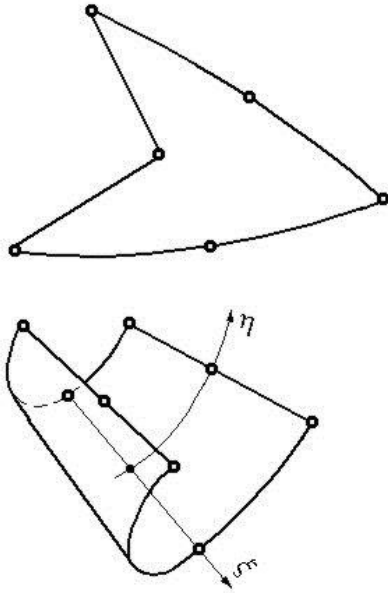


Fig. 7

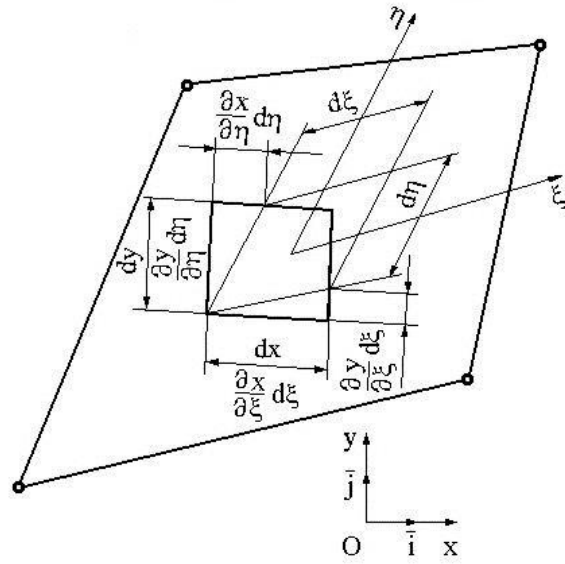


Fig. 8

Similar, se calculează volumul elementar, în funcție de dimensiunile raportate la sistemul de coordonate local,

$$dV = (d\vec{\xi} \times d\vec{\eta}) \cdot \vec{k} = h \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{array} \right| = h |J| d\xi d\eta \quad (17)$$

Din relațiile (15) și (17), rezultă

$$dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (18)$$

Figura 8 permite și interpretarea geometrică a matricei Jacobi de transformare.