

MEF-T.4.2

MODELAREA PARAMETRILOR FIZICI CUNOSCUȚI/NECUNOSCUȚI

CUPRINS

MEF-T.4.2.1 INTRODUCERE

MEF-T.4.2.2 MODELAREA PARAMETRILOR FIZICI MONOVARIABILI

MEF-T.4.2.3 MODELAREA PARAMETRILOR FIZICI BIVARIABILI

MEF-T.4.2.1 INTRODUCERE

Rezolvarea diverselor probleme cu MEF impune, pe lângă definirea domeniului – anterior tratată – și modelarea câmpurilor parametrilor fizici, corespunzători punctelor frontierei domeniului cât și interiorului acestuia.

Parametrii fizici cunoscuți/necunoscuți pot fi mărimi scalare (temperaturi, concentrații etc.) sau mărimi vectoriale (deplasări, presiuni, viteze etc.).

Câmpurile parametrilor fizici sunt, de regulă, continue, cu o infinitate de valori necunoscute. Pentru rezolvarea numerică a problemei cu MEF se consideră un număr finit de valori necunoscute ale parametrului sau parametrilor. Acestea corespund punctelor nodale obținute în urma discretizării domeniului problemei. Valorile necunoscute corespunzătoare punctelor (nenodale) din interiorul elementului finit se determină în funcție de valorile nodale necunoscute, folosind, de asemenea, funcțiile de interpolare (aproximare). În continuare, se prezintă aspecte legate de funcțiile de interpolare (aproximare) a parametrilor fizici necunoscuți, în corespondență cu modelarea geometrică.

MEF-T.4.2.2 MODELAREA PARAMETRILOR FIZICI MONOVARIABILI

În cazul problemei din fig. 1, cu domeniul unidimensional de tip linie, parametrul fizic necunoscut $\phi(x)$ se poate aproxima pe subdomenii (elemente finite), prin funcția liniară

$$\phi_a(x) = a_1 + a_2 x. \quad (1)$$

Coeficienții (coordonatele generalizate) a_1 și a_2 sunt necunoscuți.

Particularizând relația (4.10) cu valorile corespunzătoare nodurilor elementului finit e , rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \phi_i = a_1 + a_2 x_i, \\ \phi_j = a_1 + a_2 x_j, \end{cases} \quad (2)$$

în care: ϕ_i și ϕ_j reprezintă valorile nodale necunoscute ale parametrului fizic; x_i, j – coordonatele nodale ale elementului finit e . rezolvând acest sistem în raport cu necunoscutele $a_{1,2}$ și apoi înlocuindu-le în (1), rezultă

$$\phi_a(x) = N_i(x)\phi_i + N_j(x)\phi_j, \quad (3)$$

unde,

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (4)$$

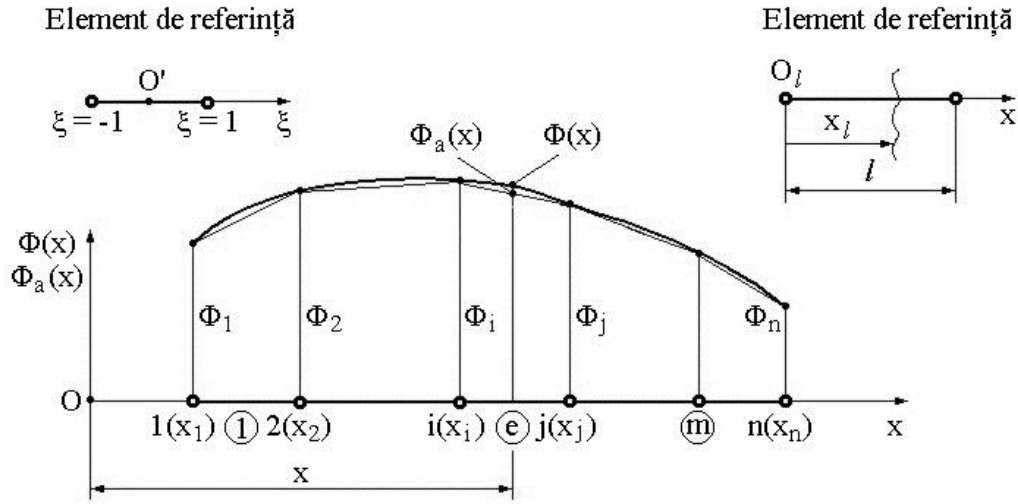


Fig. 1

sunt funcțiile de formă, corespunzătoare elementului finit respectiv.

Se observă că funcțiile de formă date de relațiile (4) respectă condițiile de interpolabilitate de tip Lagrange.

Relația (3) se poate scrie și sub următoarea formă matriceală,

$$\phi_a(x) = [N(x)][\phi], \quad (5)$$

unde,

$$[N(x)] = [N_i(x) \ N_j(x)], \quad (6)$$

reprezintă matricea funcțiilor de formă și

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{bmatrix}, \quad (7)$$

matricea necunoscutelor nodale.

Determinarea valorilor intermediare ale parametrului necunoscut, în urma obținerii necunoscutelor nodale ϕ_i , cu $i = 1, 2, \dots, n$, se realizează folosind succesiv relația (5), pentru toate elementele finite ale domeniului problemei. Se observă că matricea funcțiilor de formă se modifică de la un element finit la celălalt, ceea ce implică un volum mărit de operații de calcul și programare greoaie. Pentru micșorarea efectelor acestor dezavantaje, se pot folosi elemente finite de tip „părinte”, în coordonate locale normalizate (fig. 1) sau generale (fig. 1).

Aproximarea funcției parametrului fizic necunoscut, ca și aproximarea funcției de descriere a domeniului geometric, se pot realiza respectând diferite grade de compatibilitate (continuitate) interelemente. Există situații practice (încovoierea barelor sau a plăcilor) când este necesar ca funcția de aproximare să fie clasa C^1 sau mai mare, adică să fie continuă și la nivelul derivatelor. Pentru elementul finit de referință, raportată la sistemul de coordonate local $O_l x$ din fig. 1, în vederea modelării (aproximării) parametrului ϕ în raport cu valorile nodale ϕ_i , j și $\phi'_{i,j}$ (derivata în raport variabila locală x_l), se consideră funcția de aproximare (de clasa C^1) și derivata acesteia cu formele:

$$\phi_a = c_0 + c_1 x_l + c_2 x_l^2 + c_3 x_l^3, \quad (8)$$

$$\phi'_a = c_1 + 2c_2 x_l + 3c_3 x_l^2. \quad (9)$$

Prin particularizarea relațiilor (8) și (9), cu $\phi_a = \phi_i$, $\phi'_a = \phi'_i$, pentru $x_l = 0$ și $\phi_a = \phi_j$, $\phi'_a = \phi'_j$, pentru $x_l = l$, se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} c_0 = \phi_i, \\ c_0 + c_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3 = \phi_j, \\ c_1 = \phi'_i, \\ c_1 + 2c_2 l + 3c_3 l^2 = \phi'_j, \end{cases} \quad (10)$$

ale cărei soluții înlocuite în (8) conduce la o expresie de forma,

$$\phi_a(x) = [N(x)] [\phi], \quad (11)$$

în care:

$$[\phi] = [\phi_i \ \phi'_i \ \phi_j \ \phi'_j]^T \quad (12)$$

este matricea necunoscutelor nodale;

$$[N(x)] = [N_i(x) \ N'_i(x) \ N_j(x) \ N'_j(x)] \quad (13)$$

matricea funcțiilor de formă, cu expresiile:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{l^3} (2x_l^3 - 3lx_l^2 + l^3), \quad N'_i = \frac{x_l}{l^2} (x_l - l)^2, \\ N_j &= \frac{x_l^2}{l^2} (2x_l - 3l), \quad N'_j = \frac{x_l^2}{l^2} (x_l - l). \end{aligned} \quad (14)$$

Modelarea variației parametrului ϕ , pe întreg domeniul, discretizat în m elemente finale, se realizează aplicând succesiv relația (11) cu luarea în considerare a relațiilor (12) și (14), în care: $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = i+1$; $x_l \in [0, l]$; $l = x_j - x_i$.

Funcția liniară de aproximare a parametrului fizic ϕ , considerând elementul finit „părinte” în coordonate ξ - naturale din fig. 1, este

$$\phi_a(\xi) = a_1 + a_2 \xi. \quad (15)$$

Aplicând același algoritm ca în cazul folosirii funcției de aproximare (1), cu deosebire că variabila $x \equiv \xi$ și coordonatele $x_i = -1$ și $x_j = 1$, relația (15) devine (v. (13) și (14))

$$\phi_a(\xi) = N_i(\xi) \phi_i + N_j(\xi) \phi_j, \quad (16)$$

cu,

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad N_j(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi), \quad (17)$$

funcțiile de formă corespunzătoare elementului finit „părinte”. Sintetic, relația (16) se mai poate scrie și sub forma

$$\phi_a(\xi) = [N(\xi)] [\phi], \quad (18)$$

în care matricea funcțiilor de formă este

$$[N(\xi)] = [N_i(\xi) \ N_j(\xi)]. \quad (19)$$

Funcțiile de formă (17) și interpretările geometrice ale acestora sunt aceleași ca la modelarea geometrică. Astfel, funcțiile de formă din matricea (19), folosită pentru descrierea câmpului parametrului fizic, sunt aceleași cu funcțiile de formă din matricea de descriere geometrică a domeniului elementului finit. În acest caz elementul finit se numește izoparametric.

Sunt situații practice de interpolare când se preferă ca geometria elementului finit să fie reprezentată prin funcții de interpolare de ordin inferior funcțiilor de interpolare care descriu câmpul parametrului fizic necunoscut. De exemplu, în cazul elementului finit e din fig. 2, pentru descrierea geometrică se folosesc funcții de formă liniare și pentru descrierea câmpului parametrului fizic se folosesc funcții de formă neliniare, pătratice. Astfel, funcțiile de formă pentru modelarea geometrică sunt de ordin inferior celor pentru modelarea câmpului parametrului fizic. Elementul finit asociat acestui tip de modelare se numește subparametric.

Există posibilitatea obținerii de elemente finite supraparametrice care au geometria descrisă cu ajutorul funcțiilor de formă de ordin superior funcțiilor de formă care descriu câmpul parametrului fizic.

În unele probleme complexe cu mai mulți parametri fizici, același element finit poate fi izoparametric în raport cu un anumit parametru și subparametric sau supraparametric în raport cu ceilalți. Această situație se întâlnește, de exemplu, la rezolvarea problemelor de analiza fenomenelor fizice din mediile fluide.

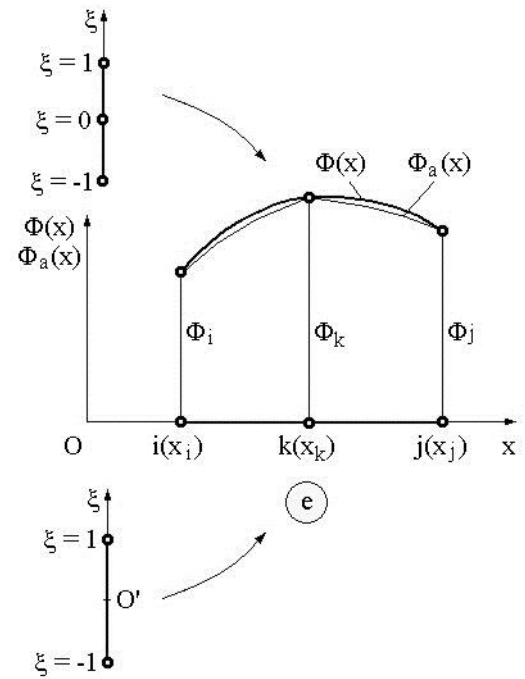


Fig. 2

MEF-T.4.2.3 MODELAREA PARAMETRILOR FIZICI BIVARIABILI

Domeniul problemei din fig. 3, suprafața plană D, se discretizează cu elemente finite de tip patrulater liniar. Pentru determinarea câmpului parametrului necunoscut, $\phi(x, y)$, în funcție de valorile nodale $\phi_i, \phi_j, \phi_k, \phi_l$, se consideră funcția de aproximare

$$\phi_a(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \quad (20)$$

corespunzătoare elementului finit oarecare e, raportat la sistemul de coordonate cartezian, global sau

$$\phi_a(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta, \quad (21)$$

corespunzătoare elementului finit „părinte”, în coordonate ξ - naturale.

Rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} a_1 + a_2x_i + a_3y_i + a_4x_iy_i = \phi_i, \\ a_1 + a_2x_j + a_3y_j + a_4x_jy_j = \phi_j, \\ a_1 + a_2x_k + a_3y_k + a_4x_ky_k = \phi_k, \\ a_1 + a_2x_l + a_3y_l + a_4x_ly_l = \phi_l, \end{cases} \quad (22)$$

obținut în urma particularizării relației (20), pentru coordonatele și valorile nodale, în raport cu necunoscutele a_i , $i = 1, 2, 3, 4$ și înlocuirea acestora în (20), conduce la relația

$$\phi_a(x, y) = [N(x, y)][\phi], \quad (23)$$

în care matricea funcțiilor de formă

$$[N(x, y)] = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l], \quad (24)$$

cu funcțiile de formă

$$\begin{aligned} N_i &= N_i(x, y, x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l), \\ N_j &= N_j(x, y, x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l), \\ N_k &= N_k(x, y, x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l), \\ N_l &= N_l(x, y, x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l) \end{aligned} \quad (25)$$

și matricea necunoscutelor nodale ale elementului finit

$$[\phi] = [\phi_i \ \phi_j \ \phi_k \ \phi_l]^T. \quad (26)$$

Funcțiile de formă (25), în formă explicită, sunt prezentate în fig. 4.

De asemenea, în urma rezolvării sistemului:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = \phi_i, \\ a_1 + a_2 - a_3 - a_4 = \phi_j, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \phi_k, \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = \phi_l, \end{cases} \quad (27)$$

obținut prin particularizarea relației (21), cu valorile nodale $\phi_{i,j,k,l}$ corespunzătoare coordonatelor nodurilor elementului finit „părinte”, în raport cu necunoscutele a_i , $i = 1, 2, 3, 4$ și înlocuirii acestora în (21), rezultă relația

$$\phi_a(\xi, \eta) = [N(\xi, \eta)][\phi], \quad (28)$$

în care matricea funcțiilor de formă este

$$[N(\xi, \eta)] = [N_1(\xi, \eta) \ N_2(\xi, \eta) \ N_3(\xi, \eta) \ N_4(\xi, \eta)], \quad (29)$$

cu funcțiile de formă,

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (30)$$

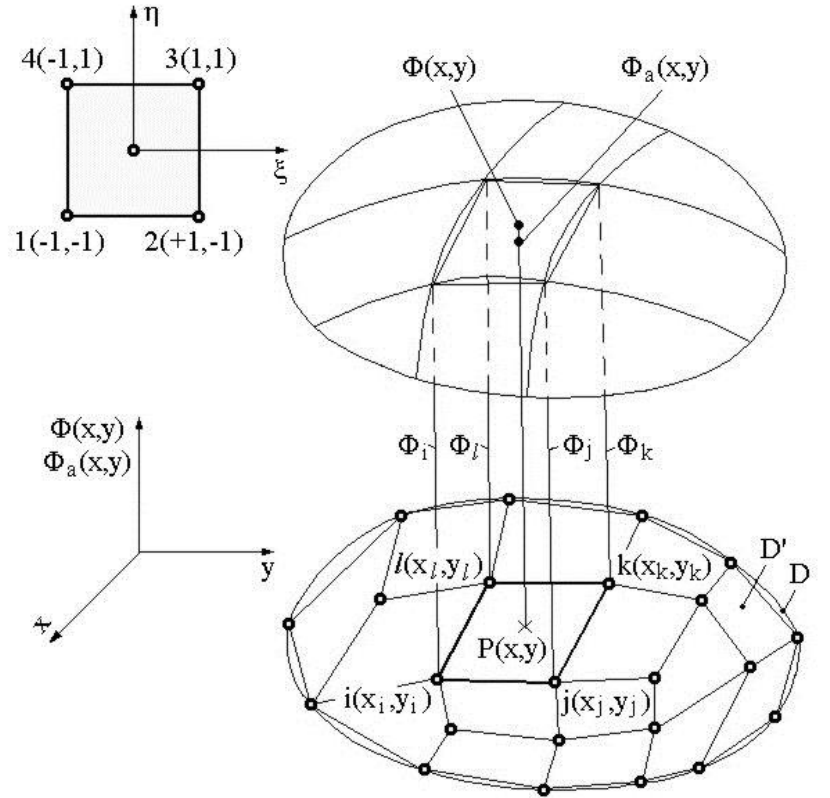


Fig. 3

și matricea valorilor nodale necunoscute, $[\phi]$, de forma (26). Aceste funcții de formă se pot obține și prin particularizările în relațiile (25), explicitate în anexa 2, pentru: $x_1 = -1, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = -1, x_3 = 1, y_3 = 1, x_4 = -1, y_4 = 1, x = \xi$ și $y = \eta$.

Și în acest ultim caz se evidențiază simplitatea obținerii funcțiilor de formă, care au la bază elementul finit „părinte”, în coordonate naturale. Aceasta, pe lângă alte avantaje, care vor fi prezentate în capitolele următoare, justifică folosirea frecventă în cadrul MEF a elementelor finite de referință raportate la sisteme de coordonate naturale.

De asemenea, și în acest caz al problemelor cu domenii de tip suprafață, se poate analiza, similar ca în cazul precedent (probleme cu domenii de tip linie), legătura dintre funcțiile de formă folosite pentru modelarea geometrică și pentru modelarea câmpului parametrului fizic. De exemplu, elementul finit din fig. 3, este izoparametric, deoarece atât pentru modelarea geometrică, cât și pentru modelarea câmpului parametrului fizic, se folosesc aceleași funcții de formă.

Șirul exemplificărilor legate de modelarea câmpului parametrului fizic poate continua atât în direcția diversificării tipului problemei (volume), cât și în direcția diversificării funcțiilor de aproximare adoptate. Deoarece exemplificările în direcțiile amintite nu ar aduce elemente noi din punct de vedere principal, în continuare se vor prezenta aspecte legate de proprietățile, alegerea și cerințele funcțiilor de aproximare.

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{-Y_1 x_k x_j Y_j + x_j Y_1 x_k Y_k - x_1 Y_j x_k Y_k + Y_k x_1 x_j Y_j - x_j Y_k x_1 Y_1 + x_k Y_j x_1 Y_1}{N} - \\
 &- \frac{-Y_1 x_j Y_j + Y_k x_j Y_j - Y_j x_k Y_k + Y_1 x_k Y_k + Y_j x_1 Y_1 - Y_k x_1 Y_1}{N} x + \\
 &+ \frac{x_k x_j Y_j - x_1 Y_j x_j + x_1 x_k Y_k + x_j x_1 Y_1 - x_k x_1 Y_1 - x_j x_k Y_k}{N} y + \\
 &+ \frac{x_j Y_k - Y_k x_1 + x_1 Y_j - x_j Y_1 - x_k Y_j + Y_1 x_k}{N} x y, \\
 N_j &= \frac{-Y_1 x_1 x_k Y_k + x_1 Y_1 x_k Y_k - x_k Y_1 x_1 Y_1 + Y_1 x_1 x_k Y_k - x_1 Y_k x_1 Y_1 + x_1 Y_k x_1 Y_1}{N} - \\
 &- \frac{Y_1 x_1 Y_1 - Y_1 x_1 Y_k + Y_1 x_k Y_k + Y_1 x_1 Y_k - Y_1 x_k Y_k - Y_1 x_1 Y_1}{N} x + \\
 &+ \frac{-x_1 x_k Y_k - x_1 Y_1 x_1 - x_k x_1 Y_1 + x_k x_1 Y_1 + x_1 x_1 Y_1 + x_1 x_k Y_k}{N} y + \\
 &+ \frac{-x_1 Y_k + Y_1 x_k - x_1 Y_1 + x_1 Y_1 + x_1 Y_k - Y_1 x_k}{N} x y, \\
 N_k &= \frac{Y_1 x_1 x_1 Y_j + x_1 Y_1 x_j Y_j - x_1 Y_1 x_j Y_j + Y_1 x_j x_1 Y_1 - x_1 Y_j x_1 Y_1 - x_1 Y_j x_j Y_1}{N} - \\
 &- \frac{Y_j x_1 Y_1 - Y_1 x_1 Y_1 - Y_1 x_j Y_j - Y_j x_1 Y_1 + Y_1 x_j Y_j + Y_1 x_1 Y_1}{N} x + \\
 &+ \frac{x_1 x_j Y_j - x_1 Y_j x_j - x_1 x_1 Y_1 - x_j x_1 Y_1 + x_1 x_1 Y_1 + x_j x_1 Y_1}{N} y + \\
 &+ \frac{-x_j Y_1 + Y_1 x_j + x_1 Y_1 + x_1 Y_j - x_1 Y_1 - Y_j x_1}{N} x y, \\
 N_l &= \frac{-Y_1 x_j x_k Y_k + x_k Y_j x_j Y_1 - x_1 Y_j x_k Y_k + Y_j x_1 x_k Y_k - x_1 Y_k x_j Y_1 + x_1 Y_k x_j Y_j}{N} - \\
 &- \frac{-Y_j x_1 Y_1 + Y_1 x_1 Y_k + Y_j x_k Y_k + Y_1 x_j Y_j - Y_k x_j Y_j - Y_1 x_k Y_k}{N} x + \\
 &+ \frac{x_j x_k Y_k - x_1 Y_k x_k - x_k x_j Y_j - x_j x_1 Y_1 + x_k x_1 Y_1 + x_1 x_j Y_k}{N} y + \\
 &+ \frac{-x_k Y_1 + Y_1 x_j + x_1 Y_k - x_1 Y_j - x_j Y_k + Y_j x_k}{N} x y,
 \end{aligned}$$

cu

$$\begin{aligned}
 N &= x_k Y_j x_j Y_1 - x_k Y_1 x_1 Y_1 - Y_1 x_k x_j Y_j + x_k Y_j x_1 Y_1 - x_j Y_k x_1 Y_1 + x_j Y_1 x_1 Y_1 + \\
 &+ Y_k x_1 x_j Y_j - x_1 Y_j x_j Y_1 - x_1 Y_j x_k Y_k + x_1 Y_1 x_k Y_k - x_j Y_1 x_k Y_k + x_j Y_1 x_k Y_k - \\
 &- x_1 Y_k x_j Y_j + x_1 Y_1 x_k Y_k - x_1 Y_k x_1 Y_1 - x_1 Y_j x_1 Y_1 - x_1 Y_j x_k Y_k + x_1 Y_j x_1 Y_1 + \\
 &+ x_1 Y_j x_k Y_k + x_1 Y_k x_j Y_1 + x_1 Y_k x_1 Y_1 + x_1 Y_1 x_j Y_j - x_1 Y_1 x_j Y_1 - x_1 Y_1 x_k Y_k.
 \end{aligned}$$

Fig. 4