

MEF-T.3.4

MODELAREA GEOMETRICĂ A DOMENIILOR DE TIP VOLUM

CUPRINS

MEF-T.3.4.1 INTRODUCERE

MEF-T.3.4.2 MODELAREA GEOMETRICĂ A DOMENIILOR DE TIP VOLUM

MEF-T.3.4.1 INTRODUCERE

Descrierea domeniilor reale care au cele trei dimensiuni comparabile ca valori presupune modelarea geometrică tridimensională. Modelarea geometrică a volumelor se face similar ca în cazurile de modelare a liniilor și suprafețelor.

MEF-T.3.4.2 MODELAREA GEOMETRICĂ A DOMENIILOR DE TIP VOLUM

În domeniul de tip volum D, din fig. 1, se consideră n noduri, care permit obținerea de m elemente finite tridimensionale, hexaedrale. Elementele finite au ca referință elementul finit „părinte” de tip cub, în coordonate ξ -naturale.

Funcția de aproximare pentru determinarea coordonatelor unui punct oarecare P al domeniului aproximativ D', obținut prin discretizare, se obține prin combinații liniare ale monoamelor independente din componența tetraedrului lui Pascal (fig. 2). În cazul elementului finit cu opt noduri primare (fig. 1), se adoptă pentru abscisa punctului P următoarea funcție de aproximare.

$$x = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta + c_4\xi\eta + c_5\xi\zeta + c_6\eta\zeta + c_7\xi\eta\zeta. \quad (1)$$

Similar, ca în cazul modelării domeniilor de tip linie sau suprafață, se particularizează relația (1), conform corespondențelor dintre coordonatele nodale ale elementului finit „părinte” și ale elementului finit oarecare e (fig. 1); se rezolvă sistemul de ecuații liniare obținut, se înlocuiesc soluțiile în (1) și pentru coordonate x rezultă,

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)x_i + \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)x_{i'} + \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)x_k + \\ & + \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)x_{l'} + \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)x_{j'} + \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)x_j, \\ & + \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)x_{k'} + \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)x_{j'}. \end{aligned} \quad (2)$$

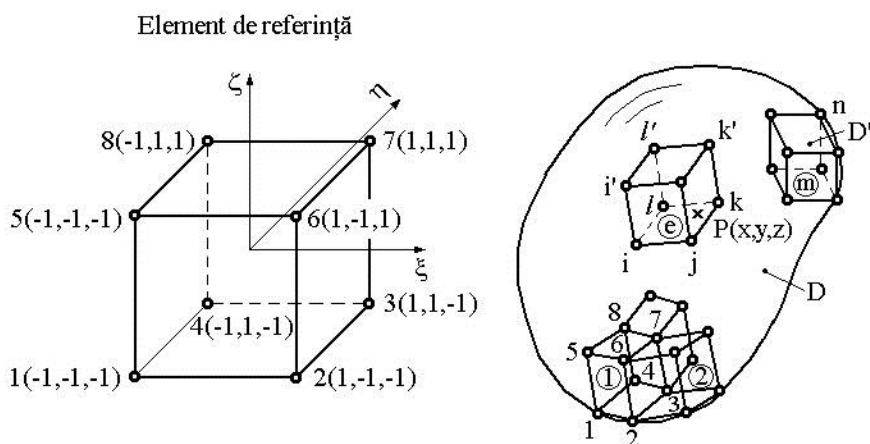


Fig. 1

Această relație în formă generalizată, aplicabilă tuturor elementelor finite din domeniul problemei, se poate scrie sub forma,

$$x = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta, \zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \\ x_5^e \\ x_6^e \\ x_7^e \\ x_8^e \end{bmatrix}, \quad (3)$$

unde,

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (4)$$

sunt funcții de formă corespunzătoare elementului finit „părinte”

ales, cu valorile pentru indicii i și factorii ξ_i , η_i , ζ_i conform tab. 1; $x_1^e, \dots, x_8^e$ sunt abscisele nodale ale unui element finit oarecare, în corespondență cu abscisele nodale ale elementului finit „părinte”, conform matricei de conexiuni (similară cu cea din cazul bidimensional).

Relații de forma (4) se pot scrie și pentru celelalte coordonate (ordonata și cota) ale punctului oarecare P. Aceste relații se pot sintetiza într-o transformare de forma,

$$[N(\xi, \eta, \zeta)] = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_2(\xi, \eta, \zeta) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_3(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(\xi, \eta, \zeta) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_4(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_4(\xi, \eta, \zeta) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_5(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_5(\xi, \eta, \zeta) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_6(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_6(\xi, \eta, \zeta) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_7(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_7(\xi, \eta, \zeta) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_8(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_8(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

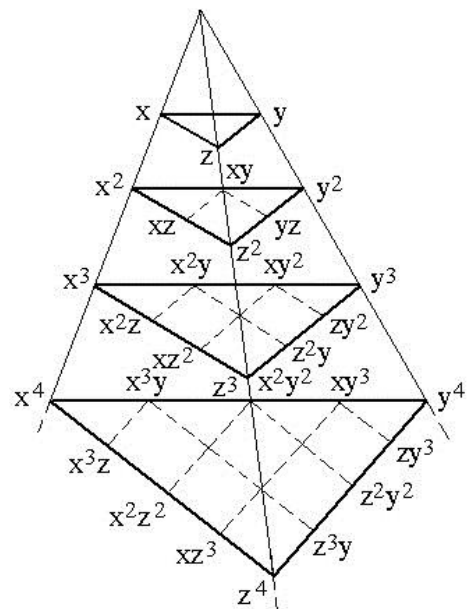


Fig. 2

Tab. 1

i	ξ_i	η_i	ζ_i
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

Funcțiile de formă din această matrice, date de relația (4), se numesc funcții de formă trilineare, consecință a faptului că se pot obține prin combinarea funcțiilor de formă unidimensionale liniare.

Pentru mărirea acurateții discretizării, mai ales în zonele de frontieră, se pot folosi funcții de formă de ordin superior, care necesită considerarea unui element finit „părinte” cu noduri externe secundare și cu noduri interne. Astfel, pentru definirea funcțiilor de formă, folosind polinoamele Lagrange de ordin doi, este necesar elementul finit „părinte” din fig. 3, cu 27 de noduri: 8 noduri externe primare, 18 noduri externe secundare, 1 nod intern.

Aplicând algoritmul de obținere a polinoamelor de interpolare de tip Lagrange a funcțiilor bivariabile, extins pentru funcțiile invariabile, se obțin următoarele funcții de formă:

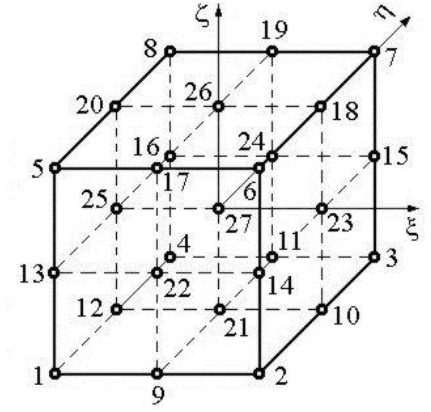


Fig. 3

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi - 1)(\eta - 1)(\zeta - 1), \\
 N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi + 1)(\eta - 1)(\zeta - 1), \\
 N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta - 1), \\
 N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi - 1)(\eta + 1)(\zeta - 1), \\
 N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi - 1)(\eta - 1)(\zeta + 1), \\
 N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi + 1)(\eta - 1)(\zeta + 1), \\
 N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta + 1), \\
 N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} \xi \eta \zeta (\xi - 1)(\eta + 1)(\zeta + 1), \\
 N_9(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \eta \zeta (1 - \xi^2)(\eta - 1)(\zeta - 1), \\
 N_{10}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \zeta (\xi + 1)(1 - \eta^2)(\zeta - 1), \\
 N_{11}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \eta \zeta (1 - \xi^2)(\eta + 1)(\zeta - 1), \\
 N_{12}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \zeta (\xi - 1)(1 - \eta^2)(\zeta - 1), \\
 N_{13}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1)(\eta - 1)(1 - \zeta^2), \\
 N_{14}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1)(\eta - 1)(1 - \zeta^2), \\
 N_{15}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1)(\eta + 1)(1 - \zeta^2), \\
 N_{16}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1)(\eta + 1)(1 - \zeta^2), \\
 N_{17}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \eta \zeta (1 - \xi^2)(\eta - 1)(\zeta + 1), \\
 N_{18}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \zeta (\xi + 1)(1 - \eta^2)(\zeta + 1), \\
 N_{19}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \eta \zeta (1 - \xi^2)(\eta + 1)(\zeta + 1), \\
 N_{20}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi \zeta (\xi - 1)(1 - \eta^2)(\zeta - 1), \\
 N_{21}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \zeta (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(\zeta - 1),
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
N_{22}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta - 1) (1 - \zeta^2), \\
N_{23}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2), \\
N_{24}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1) (1 - \zeta^2), \\
N_{25}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2), \\
N_{26}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \zeta (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (\zeta + 1), \\
N_{27}(\xi, \eta, \zeta) &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2)
\end{aligned}$$

Pentru eliminarea dezavantajului existenței numărului mare de noduri externe secundare și interne, și în acest caz se pot folosi funcții de formă de tip Serendip. Pentru elementul finit „părinte” din fig. 4, aplicând același algoritm ca în cazul elementului finit „părinte” bidimensional, se obțin relațiile funcțiilor de formă corespunzătoare nodurilor externe secundare:

$$\begin{aligned}
N_9(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 - \zeta), \\
N_{10}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta^2) (1 - \zeta), \\
N_{11}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta) (1 - \zeta), \\
N_{12}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta^2) (1 - \zeta), \\
N_{13}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta^2), \\
N_{14}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta^2), \\
N_{15}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta^2), \\
N_{16}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta^2), \\
N_{17}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta) (1 - \zeta), \\
N_{18}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta^2) (1 + \zeta), \\
N_{19}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta) (1 + \zeta), \\
N_{20}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta^2) (1 + \zeta)
\end{aligned} \tag{7}$$

și ale funcțiilor de formă corespunzătoare nodurilor externe primare:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) - \frac{1}{2} (N_9(\xi, \eta, \zeta) + N_{12}(\xi, \eta, \zeta) + N_{13}(\xi, \eta, \zeta)), \\
N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \zeta) - \frac{1}{2} (N_9(\xi, \eta, \zeta) + N_{10}(\xi, \eta, \zeta) + N_{14}(\xi, \eta, \zeta)), \\
N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) - \frac{1}{2} (N_{10}(\xi, \eta, \zeta) + N_{11}(\xi, \eta, \zeta) + N_{15}(\xi, \eta, \zeta)), \\
N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \zeta) - \frac{1}{2} (N_{12}(\xi, \eta, \zeta) + N_{11}(\xi, \eta, \zeta) + N_{16}(\xi, \eta, \zeta)), \\
N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) - \frac{1}{2} (N_{20}(\xi, \eta, \zeta) + N_{17}(\xi, \eta, \zeta) + N_{13}(\xi, \eta, \zeta)), \\
N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \zeta) - \frac{1}{2} (N_{17}(\xi, \eta, \zeta) + N_{18}(\xi, \eta, \zeta) + N_{14}(\xi, \eta, \zeta)), \\
N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) - \frac{1}{2} (N_{18}(\xi, \eta, \zeta) + N_{19}(\xi, \eta, \zeta) + N_{15}(\xi, \eta, \zeta)), \\
N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \zeta) - \frac{1}{2} (N_{19}(\xi, \eta, \zeta) + N_{20}(\xi, \eta, \zeta) + N_{16}(\xi, \eta, \zeta)).
\end{aligned} \tag{8}$$

Discretizarea domeniilor de tip volum se poate realiza și cu elemente finite tridimensionale tetraedrale. Elementele finite de referință („părinte”) se pot obține prin particularizarea elementului finit „părinte” cub, considerând nodurile unei fețe identice. În fig. 5 se prezintă elementul finit de referință piramidal, obținut prin unirea nodurilor 5, 6, 7 și 8 ale elementului finit „părinte” din fig. 1, într-un singur nod. Funcția de formă corespunzătoare nodului generat se obține ca sumă a funcțiilor de formă corespunzătoare nodurilor și a re forma,

$$N_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta). \quad (9)$$

Similar, ca în cazul elementelor finite bidimensionale triunghiulare, se pot genera elemente finite tetraedrale cu sisteme de coordonate locale L-naturale, de volum și funcții de formă corespunzătoare, aplicând același algoritm.

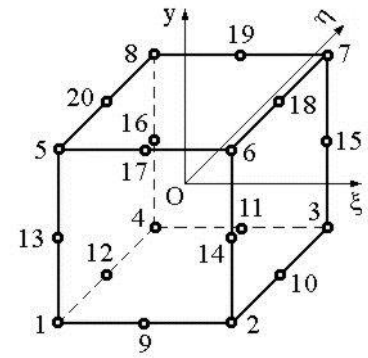


Fig. 4

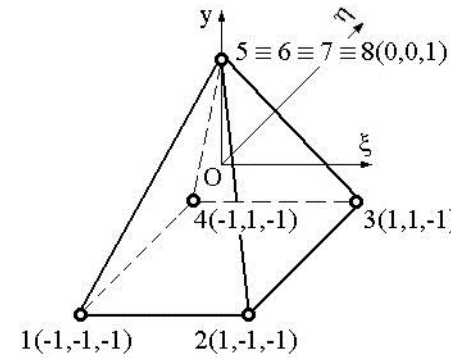


Fig. 5