

MODELAREA GEOMETRICĂ A DOMENIILOR DE TIP SUPRAFAȚĂ

CUPRINS

MEF-T.3.3.1 INTRODUCERE

MEF-T.3.3.2 MODELAREA GEOMETRICĂ A DOMENIILOR DE TIP SUPRAFATĂ

MEF-T.3.3.1 INTRODUCERE

Modelarea geometrică a suprafețelor urmărește descrierea domeniilor reale cu o dimensiune mult mai mică decât celelalte două și a frontierelor domeniilor de tip volum.

MEF-T.3.3.2 MODELAREA GEOMETRICĂ A DOMENIILOR DE TIP SUPRAFATĂ

Domeniul de tip suprafață, D , din fig. 1, se poate discretiza considerând n elemente finite bidimensionale de tip patrulater, obținute prin unirea cu linii drepte a celor n noduri ale domeniului. Corespunzător acestui tip de element finit, se utilizează pentru modelare un element finit „părinte” (de referință), în coordonate locale ξ -naturale.

Funcția de aproximare pentru determinarea coordonatelor unui punct oarecare P al domeniului de referință D' se definește prin combinații liniare ale monoamelor independente din componența triunghiului lui Pascal (fig. 2).

Pentru cazul elementului finit patrulater cu patru noduri primare (fig. 1) se adoptă pentru abscisa punctului P următoarea funcție de aproximare

$$x = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta \quad (1)$$

Particularizând relația (1), conform corespondențelor dintre coordonatele nodale ale elementului finit „părinte” și ale elementului oarecare e, din tab. 1, 2 rezultă sistemul liniar,

$$\begin{cases} x_i = c_0 - c_1 - c_2 + c_3, \\ x_j = c_0 + c_1 - c_2 - c_3, \\ x_k = c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ x_l = c_0 - c_1 + c_2 - c_3. \end{cases} \quad (2)$$

Rezolvând sistemul (2) în raport cu necunoscutele c_x , $x = 0, 1, 2, 3$, relația (1) devine,

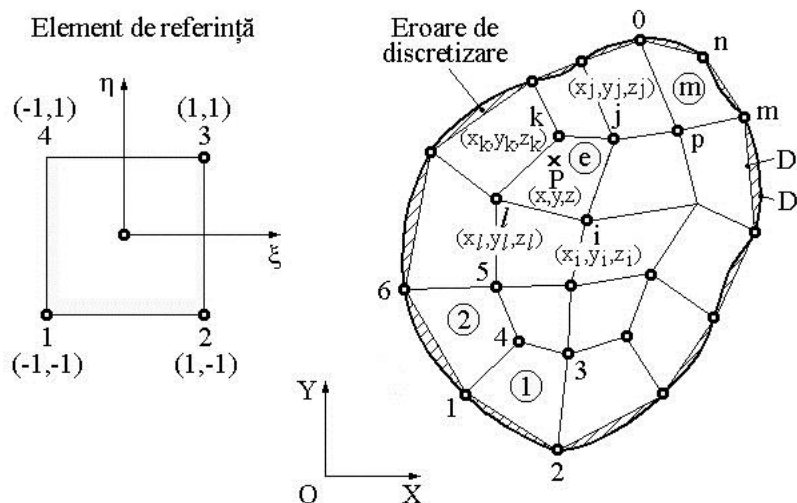


Fig. 1

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & \xi & & \eta & \\
 & & & & & & \\
 & & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 \\
 & & & & & & \\
 & \xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 \\
 & & & & & & \\
 & \xi^4 & & \xi^3\eta & & \xi^2\eta^2 & & \xi\eta^3 & & \eta^4 \\
 & & & & & & \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & & & \\
 \xi^n & & \xi^{n-1}\eta & . & . & . & \xi\eta^{n-1} & & \eta^n
 \end{array}$$

Fig. 2

$$x = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_j + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_k + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_l. \quad (3)$$

Generalizat, această relație se scrie sub forma,

$$x = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta)] \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{bmatrix}, \quad (4)$$

unde,

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (5)$$

reprezintă *funcțiile de formă* cu valorile indicelui i și factorilor ξ_i, η_i conform tab. 2, cu $g = 1, 2, 3, 4$ și cu h corespunzător elementului finit $e \in \{1, m\}$ conform matricei de conexiuni, din tab. 3.

Tab.1

Local		Global		
ξ	η	x	y	z
-1	-1	x_i	y_i	z_i
1	-1	x_j	y_j	z_j
1	1	x_k	y_k	z_k
-1	1	x_l	y_l	z_l

Tab. 2

i	ξ_i	η_i
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Tab. 3

Elemente finite						
g	1	2	...	e	...	m
1	1	1	...	i	...	o
2	2	4	...	j	...	p
3	3	5	...	k	...	r
4	4	6	...	l	...	n

Noduri

În fig. 3 se prezintă graficele funcțiilor de formă date de relația (5). Suprafețele funcțiilor de formă $N_i(\xi, \eta)$, cu $i = 1, 2, 3, 4$ sunt suprafețe riglate cu linii drepte, consecință a formei matematice a relației (5). Această relație poate fi obținută și prin combinarea funcțiilor de formă unidimensionale, pentru cele două direcții ξ, η . În consecință, funcțiile de formă date de relațiile (5) se mai numesc și funcții de formă biliniare.

Funcțiile de formă (5), de asemenea, se pot obține și prin particularizarea polinoamelor Lagrange bivariabile, pentru nodurile elementului finit „părinte”, din fig. 1.

Similar, se pot obține relații de aproximare de forma (4) și pentru celelalte coordonate (y și z) ale unui punct oarecare P , care aparține elementului finit. Ținând cont de relațiile de calcul ale coordonatelor, rezultă relația de calcul al matricei coordonatelor, $[p] = [x \ y \ z]^T$, în care,

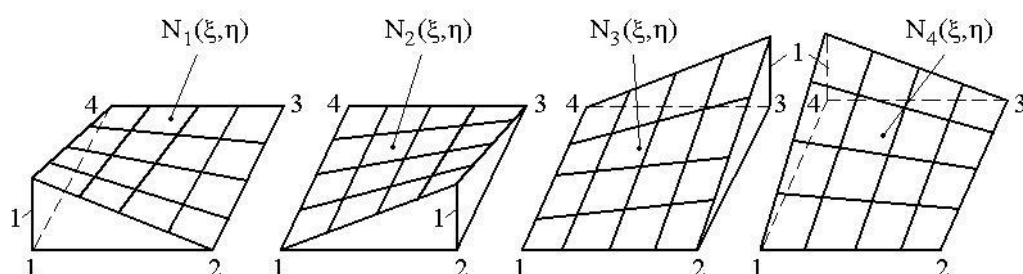


Fig. 3

$$[N(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_2(\xi, \eta) \\ N_3(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_3(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(\xi, \eta) \\ N_4(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[\rho^e] = [x_1^e \ y_1^e \ z_1^e \ x_2^e \ y_2^e \ z_2^e \ x_3^e \ y_3^e \ z_3^e \ x_4^e \ y_4^e \ z_4^e]^T, \quad (7)$$

sunt matricea de formă și, respectiv, matricea coordonatelor nodale globale.

Modelarea geometrică cu elemente finite de tip patrulater prezintă dezavantajul că pentru aproximarea unei suprafețe reale oarecare este necesară mărirea numărului de noduri, deoarece contururile elementelor finite sunt linii drepte. Pentru evitarea acestui dezavantaj se pot realiza discretizări cu elemente finite cu laturi linii curbe.

Pentru realizarea de elemente finite de tip patrulater cu laturi linii curbe, se pornește de la elementul finit „părinte” cu patru noduri externe primare (colțurile pătratului), cu noduri externe secundare (pe laturile pătratului) și/sau noduri interne (în interiorul pătratului). Coordonatele unui punct oarecare P al unui element finit se pot determina folosind funcțiile de aproximare, obținute prin combinații liniare ale monoamelor triunghiului Pascal (v. fig. 2), astfel încât numărul constantelor să fie egal cu numărul nodurilor considerat. Deoarece expresiile obținute prin această metodă sunt complexe, negeneralizabile, și deci greoi de prelucrat matematic (evaluat, diferențiat, integrat), în continuare se prezintă alte metode de aproximare, care conduc cu ușurință la expresii simplificate pentru funcțiile de formă.

Din cele prezentate, rezultă importanța deosebită pentru modelarea geometrică a funcțiilor de formă, și în consecință se va insista cu precădere asupra acestora.

Metoda de interpolare care folosește polinoamele Lagrange de ordinul doi, aplicată elementului finit „părinte” din fig. 4, permite determinarea următoarelor funcții de formă:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1)(\eta - 1), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1)(\eta - 1), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1)(\eta + 1), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1)(\eta + 1), \\ N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2)(\eta - 1), \\ N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1)(1 - \eta^2), \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2)(\eta + 1), \\ N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)(1 - \eta^2), \\ N_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2). \end{aligned}$$

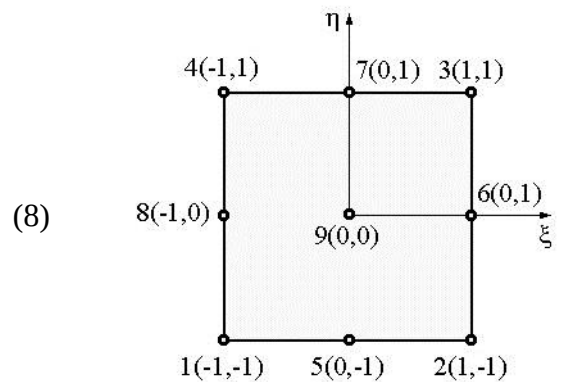


Fig. 4

Se poate verifica ușor că funcțiile de formă obținute verifică condițiile de interpolabilitate de tip Lagrange.

Reprezentarea grafică a funcțiilor de formă corespunzătoare unui nod extern primar, unui nod extern secundar și nodului intern, este prezentată în fig. 5.

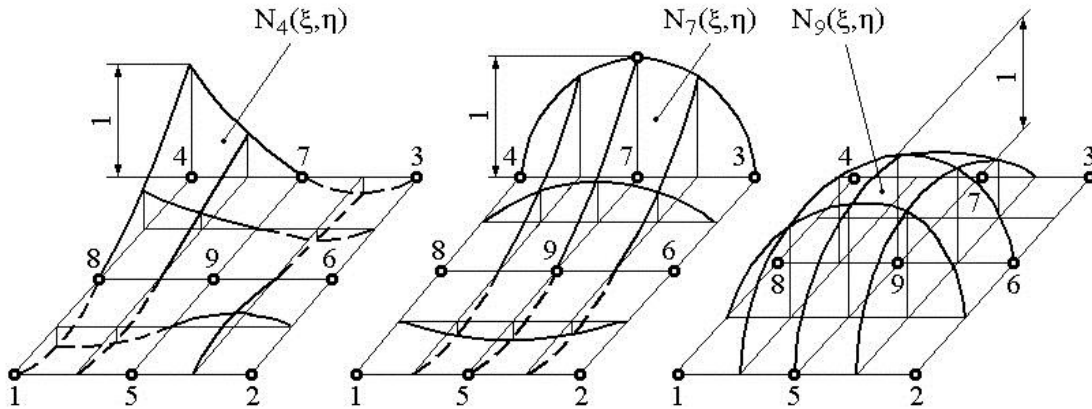


Fig. 5

Este posibil, în vederea măririi acurateții discretizării (micșorării erorii de discretizare), să se folosească polinoamele Lagrange de ordin superior. Pentru definirea funcțiilor de formă în aceste situații, este necesară considerarea de moduri interne elementului finit, ceea ce constituie un dezavantaj al acestei metode.

În vederea obținerii elementelor finite, cu funcții de formă asociate de grad superior, fără noduri interne, pornind de la metodele clasice, s-a dezvoltat o nouă metodă care are la bază observația și intuiția. Funcțiile astfel obținute se numesc funcții de interpolare de tip Serendip după vestiții eroi ai povestirii lui Horace Walpole „The three princes of Serendip”, care făceau descoperiri neașteptate deosebit de interesante. În continuare, se prezintă câteva exemple de obținere a funcțiilor de interpolare de tip Serendip.

Pentru determinarea funcțiilor de formă corespunzătoare elementului finit „părinte” din fig. 6 pentru început se „construiesc” funcțiile de formă pentru nodurile externe secundare. În acest sens se urmărește permanent respectarea condițiilor de interpolabilitate de tip Lagrange. De exemplu, pentru nodul 5 se consideră pe direcția nodurilor 1-2 funcția de formă quadratică, $N_{1,2}(\xi) = 1 - \xi^2$, și pe direcția nodurilor 5-7 funcția de formă liniară, $N_{5,7}(\eta) = 0,5 (1 - \eta)$. Prin combinarea acestor funcții, se obține funcția de formă corespunzătoare nodului 5, cu următoarea expresie

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (1 - \eta), \quad (9)$$

reprezentată grafic în fig. 7,a.

Similar, se obțin și pentru celelalte noduri externe secundare următoarele relații:

$$\begin{aligned} N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 - \xi), \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta), \\ N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi). \end{aligned} \quad (10)$$

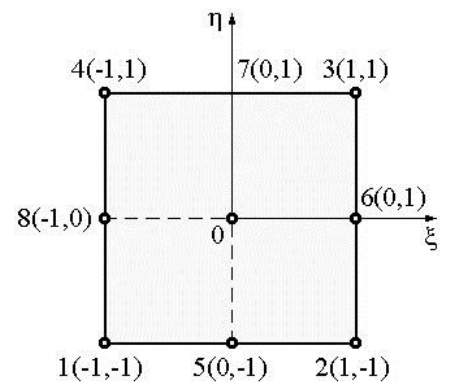


Fig. 6

Determinarea funcțiilor de formă corespunzătoare nodurilor externe primare realizează pornind de la funcțiile de formă biliniare, din care se scad jumătățile funcțiilor de formă ale nodurilor externe secundare adiacente, pentru realizarea valorii nule în aceste noduri. Astfel, funcția de formă corespunzătoare nodului 1 (fig. 7,b) se poate determina cu relația,

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) - \frac{1}{2} N_5(\xi, \eta) - \frac{1}{2} N_8(\xi, \eta) \quad (11)$$

cu funcțiile de formă $N_5(\xi, \eta)$ și $N_8(\xi, \eta)$ date de relațiile pentru modelul liniar și respectiv (10)

Aplicând același algoritm, se obțin relațiile funcțiilor de formă pentru celelalte noduri externe primare:

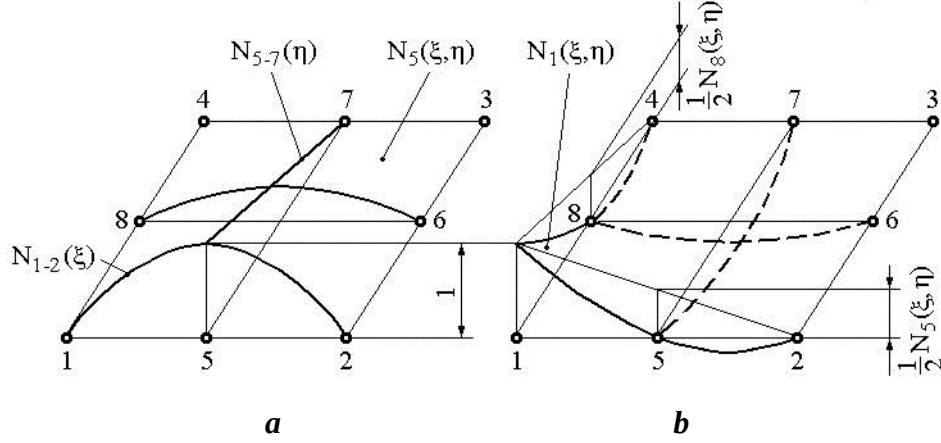


Fig. 7

$$\begin{aligned}
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi, \eta) - \frac{1}{2}N_6(\xi, \eta), \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_6(\xi, \eta) - \frac{1}{2}N_7(\xi, \eta), \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_7(\xi, \eta) - \frac{1}{2}N_8(\xi, \eta).
 \end{aligned} \tag{12}$$

în care $N_{5,6,7,8}(\xi, \eta)$ sunt date de relațiile (9) și (10).

În unele situații este potrivit ca pentru discretizarea domeniului real al problemei să se utilizeze două sau mai multe tipuri de elemente finite, cu numere de noduri diferite. Pentru realizarea compatibilității interelemente – toate nodurile unui element să coincidă cu nodurile elementelor adiacente – este necesar să se introducă elemente finite de tranziție, cu număr de noduri diferit pe muchiile acestuia. De exemplu, în fig. 8, pentru a se realiza compatibilitatea dintre zone discretizată cu elemente finite liniare (element finit „părinte” I) cu zona discretizată cu elemente finite neliniare (element finit „părinte” III), este necesară introducerea unei zone de tranziție, discretizată cu elemente finite care au ca referință elementul finit „părinte” II. Aplicând același algoritm, funcțiile de formă ale elementului finit de tranziție sunt:

$$\begin{aligned}
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta-1), \\
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi, \eta), \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5(\xi, \eta), \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Discretizarea suprafețelor se poate realiza folosind și elemente finite tridimensionale triunghiulare. Elementele finite „părinte” (de referință) și funcțiile de formă, în acest caz, se pot obține din elementele finite „părinte” patrulater, prin considerarea nodurilor de pe o muchie identice. De exemplu, elementul finit „părinte” pătrat din fig. 1, prin unirea nodurilor 3 și 4, degenerază în elementul finit triunghiular din fig. 9. Funcția de formă a nodului obținut prin unire rezultă ca dublul uneia din funcțiile de formă a nodurilor 3 și 4 ale elementului finit „părinte”, particularizată cu $\xi = 0$. Astfel, pentru nodurile elementului finit „părinte”, degenerat, funcțiile de formă sunt:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \\
N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\
N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\eta)
\end{aligned} \quad (14)$$

Expresia funcției $N_3(\xi, \eta)$ de mai sus se poate obține și ca sumă a funcțiilor de formă $N_3(\xi, \eta)$ și $N_4(\xi, \eta)$, corespunzătoare elementului finit „părinte” pătrat.

Frecvent, în practică, MEF folosește pentru discretizarea suprafețelor elemente finite triunghiulare, raportate la sisteme locale de coordonate L-naturale.

Ținând cont de descrierea sistemelor de coordonate locale și de relația de transformare, prezentate în MEF-T.3.1, se poate scrie relația de calcul a matricei coordonatelor punctului oarecare P, al unui element finit triunghiular spațial, $[p] = [x, y, z]$, cu următoarea formă:

$$[\rho] = [N(L_1, L_2, L_3)][p^e] \quad (15)$$

$$\text{unde, } [p^e] = [x_1^e \ y_1^e \ z_1^e \ x_2^e \ y_2^e \ z_2^e \ x_3^e \ y_3^e \ z_3^e]$$

este matricea coordonatelor nodale,

$$[N(L_1, L_2, L_3)] = \begin{bmatrix} N_1(L_1, L_2, L_3) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(L_1, L_2, L_3) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(L_1, L_2, L_3) \\ N_2(L_1, L_2, L_3) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(L_1, L_2, L_3) & 0 \\ 0 & 0 & N_2(L_1, L_2, L_3) \\ N_3(L_1, L_2, L_3) & 0 & 0 \\ 0 & N_3(L_1, L_2, L_3) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(L_1, L_2, L_3) \end{bmatrix} \quad (16)$$

matricea funcțiilor de formă, cu expresiile:

$$N_1(L_1, L_2, L_3) = L_1, \quad N_2(L_1, L_2, L_3) = L_2, \quad N_3(L_1, L_2, L_3) = L_3 \quad (17)$$

Coordonatele L_1 , L_2 și L_3 sunt funcții liniare în x și y , conform relațiilor, și se interpretează cu ajutorul relațiilor. În fig. 10 se prezintă forma grafică a funcției de formă corespunzătoare nodului 1 al unui element finit triunghiular.

Funcțiile de formă pentru cazul elementelor finite triunghiulare de ordin superior, când se consideră și noduri externe secundare – pe laturile elementului finit – se obțin cu următoarea relație generativă

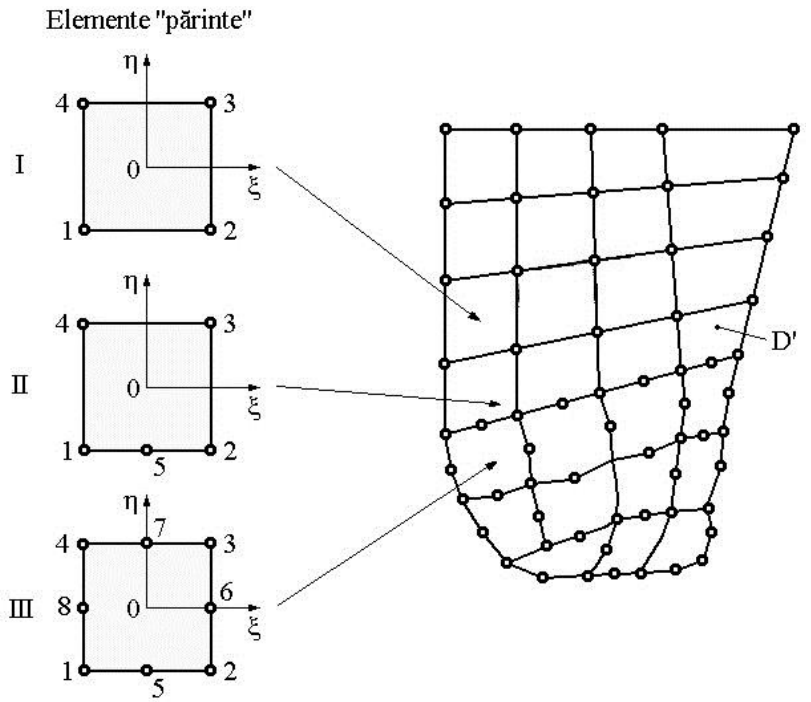


Fig. 8

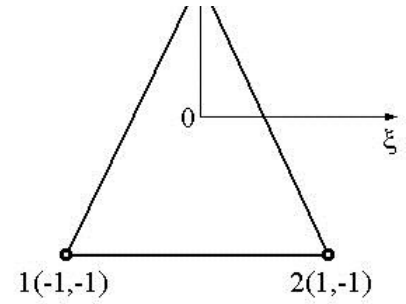


Fig. 9

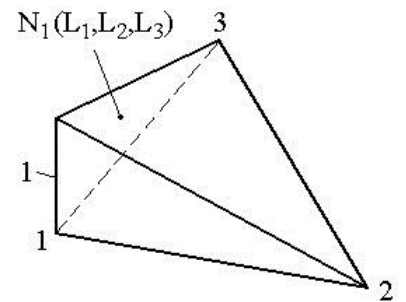


Fig. 10

$$N_i(L_1, L_2, L_3) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{F_k}{F_{ki}} \quad (18)$$

în care: N_i este funcția de formă corespunzătoare nodului i al elementului triunghiular cu n noduri pe o latură; k – indice ce se asociază liniilor paralele cu direcția L_i , care trec prin celelalte noduri ale elementului finit; F_k – distanța de la un punct oarecare al elementului finit la linia k ; F_{ki} – valoarea distanței F_k în nodul i . Numărul și poziția nodurilor elementului finit se aleg astfel încât unindu-le să formeze linii paralele cu axele de coordonate.

Pentru evidențierea aplicării practice a relației (17) se consideră cazul unui element finit triunghiular cu trei noduri externe primare (în colțuri) și cu trei noduri externe secundare (mijloacele laturilor), deci cu $n = 3$ (fig. 11). Pentru determinarea funcției de formă corespunzătoare nodului 1 ($i = 1$) se pot trasa două drepte paralele ($k = 1$ și $k = 2$), prin nodurile elementului finit, mai puțin nodul 1 (fig. 11,a). Funcțiile din relația (17), pentru acest caz, sunt:

$$\begin{aligned} F_1 &= L_1, \\ F_2 &= L_1 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Valorile acestor funcții în nodul 1 ($L_1 = 1$) sunt: $F_{11} = 1$ și $F_{21} = 0,5$.

Înlocuind aceste rezultate în (18), rezultă formă corespunzătoare nodului 1,

$$N_1(L_1, L_2, L_3) = L_1(2L_1 - 1) \quad (20)$$

În mod similar, se obțin și funcțiile de formă pentru celelalte două noduri externe primare.

$$\begin{aligned} N_2(L_1, L_2, L_3) &= L_2(2L_2 - 1), \\ N_3(L_1, L_2, L_3) &= L_3(2L_3 - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Funcțiile de formă pentru nodul extern secundar 4 se obțin pornind de la liniile trasate prin celelalte noduri, $k = 1$ și $k = 2$ (fig. 11,b), pentru care se scriu funcțiile:

$$\begin{aligned} F_1 &= L_1, \\ F_2 &= L_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Aceste funcții, în nodul 4 ($L_1 = 0,5$, $L_2 = 0,5$), au valorile $F_{14} = 0,5$ și $F_{24} = 0,5$. În urma înlocuirilor în relația (18), rezultă funcția de formă

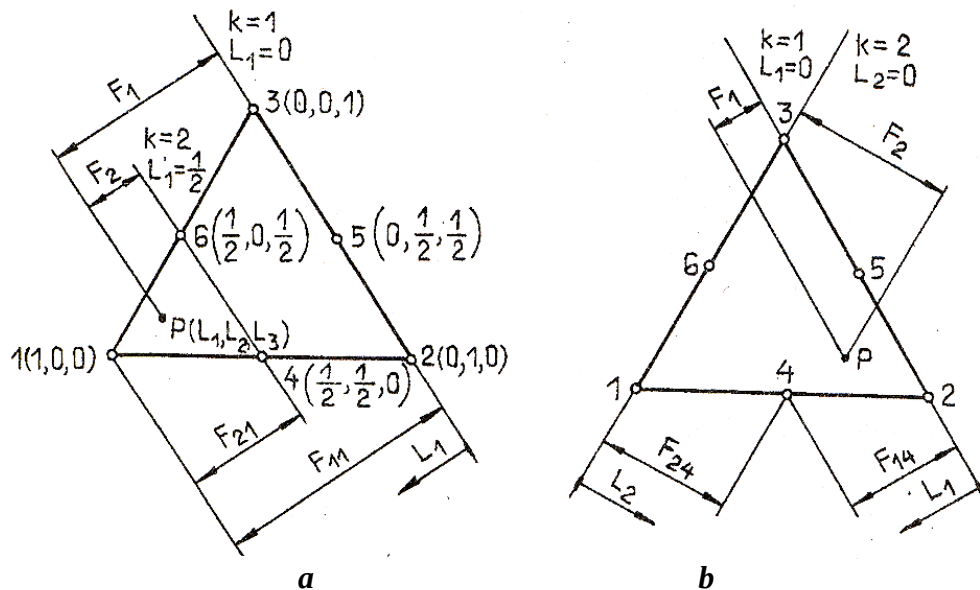


Fig. 11

$$N_4 = (L_1, L_2, L_3) = 4L_1 L_2. \quad (23)$$

Similar se obțin și funcțiile de formă pentru celelalte două noduri externe secundare:

$$\begin{aligned} N_5 &= (L_1, L_2, L_3) = 4L_2 L_3, \\ N_6 &= (L_1, L_2, L_3) = 4L_1 L_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Din analiza funcțiilor de formă astfel obținute, se observă că acestea respectă condițiile de interpolabilitate de tip Lagrange.

În fig. 12 sunt prezentate reprezentările grafice ale funcțiilor de formă corespunzătoare unui nod extern primar și, respectiv, unui nod extern secundar.

Algoritmul de obținere a funcțiilor de formă de mai sus este aplicabil și pentru cazul elementelor finite triunghiulare cu noduri interne.

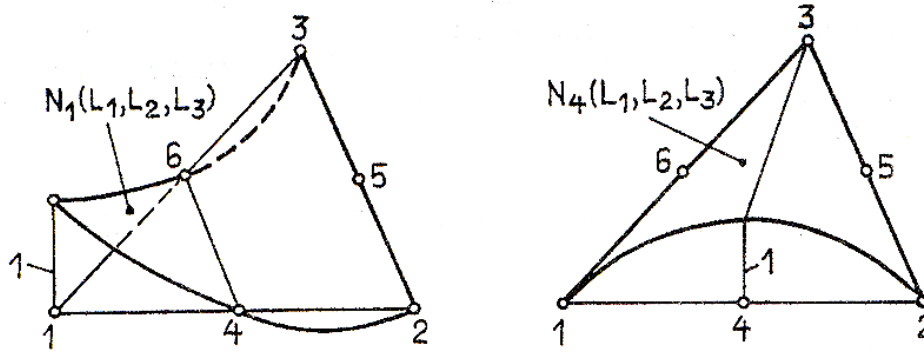


Fig. 12