MEF-T.3.2

MODELAREA GEOMETRICĂ A DOMENIILOR DE TIP LINIE

CUPRINS
MEF-T.3.2.1 INTRODUCERE
MEF-T.3.2.2 MODELAREA LINIARĂ A DOMENIILOR TIP LINIE
MEF-T.3.2.3 MODELAREA NELINIARĂ A DOMENIILOR TIP LINIE

MEF-T.3.2.1 INTRODUCERE

Această modelare se aplică în cazul când domeniul real al problemei de rezolvat are o dimensiune mult mai mare decât celelalte două (cabluri, bare), care se pot neglija. De asemenea, această modelare se poate aplica şi pentru descrierea frontierelor domeniilor de tip suprafaţă.

Evaluarea aproximativă a funcţiei corespunzătoare domeniului de tip linie se poate realiza în diverse moduri. În continuare, se vor prezenta algoritmi de modelare geometrică folosiţi cu precădere şi de MEF.

În fig. 1, în domeniul spaţial de tip line D, se consideră n puncte (noduri), cu coordonatele cunoscute, care permit obţinerea a m elemente finite unidimensionale. Aproximarea domeniului D se realizează pentru fiecare element finit în parte, folosindu-se una sau mai multe funcţii de aproximare, astfel generându-se domeniul D'. Funcţia de aproximare ataşată elementelor finite ale domeniului D' trebuie să fie simplă – uşor de evaluat, derivat şi integrat – şi în punctele nodale trebuie să ia aceeaşi valoare cu funcţia exactă ataşată domeniului D. În general, în cazul MEF, funcţia de aproximare este un polinom algebric, aceasta realizând aproximări precise pe intervale de lungime mică.

Foarte frecvent în procesul de aproximare se iau în considerare ca funţii liniar independente monoamele: 1, ξ, ξ^2,…, ξ^n, care prin combinaţia liniară de ordinul r, cu r ales preliminar, generează funcţia de aproximare polinomială

$$F(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + ... + c_r\xi^r. \qquad (1)$$

Pentru definirea completă a funcţiei de aproximare se impune determinarea coeficienţilor c_0, c_1,…, c_r.

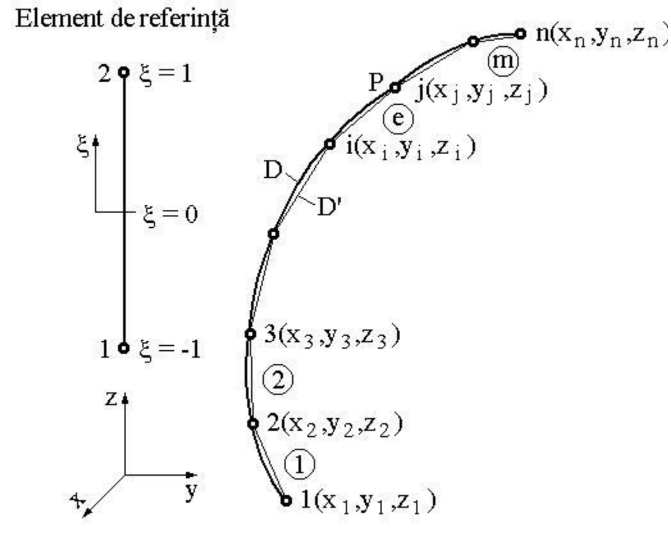

Fig. 1

MEF-T.3.2.2 MODELAREA LINIARĂ A DOMENIILOR TIP LINIE

În cazul cel mai simplu posibil, când rangul polinomului (1), r = 1, se aproximează domeniul D cu elemente finite liniare cu două puncte nodale. Fiecărui element finit i se asociază succesiv un element finit de referinţă, numit şi element finit „părinte”, cu sistemul local de coordonate ξ-naturale (fig. 1). Abscisa unui punct oarecare din interiorul unui element finit oarecare e, cu nodurile i şi j, se poate determina cu relaţia,

$$x = c_0 + c_1\xi. \qquad (2)$$

Pentru determinarea constantelor c_0 şi c_1, se particularizează relaţia (2), în punctele nodale i şi j, în care $x = x_i$, $\xi = -1$ şi, respectiv, $x = x_j$, $\xi = +1$ şi rezultă sistemul,

$$\begin{cases} x_i = c_0 - c_1, \\ x_j = c_0 + c_1. \end{cases} \tag{3}$$

Rezolvând acest sistem şi înlocuind valorile constantelor c_0 şi c_1 obţinute, în (2) rezultă,

$$x = \frac{x_i + x_j}{2} - \frac{x_i - x_j}{2}\xi \tag{4}$$

Relaţia (4), pentru generalitate, se poate scrie şi sub forma,

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1^e + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2^e \tag{5}$$

unde, $x_1^e = x_i$ şi $x_2^e = x_{i+1}$ cu i = 1, 2. … n-1.
Notând,

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi_i\xi) \tag{6}$$

cu $\xi_i = -1$, pentru i = 1 şi $\xi_i = 1$, pentru i = 2, relaţia (5) devine

$$x = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \end{bmatrix} \tag{7}$$

Funcţiile $N_i(\xi)$ se numesc polinoame (funcţii) de interpolare sau *funcţii de formă* (*modelare*) [Bathe, 1982; Olariu, 1986; Ready, 1984], consecinţă a faptului că acestea depind de tipul elementului finit de referinţă şi de sistemul de coordonate local adoptat. Se observă că funcţiile de formă astfel obţinute sunt aceleaşi cu polinoamele Lagrange folosite pentru interpolarea prin două puncte a unei funcţii unvariabile.De asemenea, se observă că aceste funcţii de formă se regăsesc ca elemente ale matricei de transformare.

Polinoamele de interpolare $N_i(\xi)$, verifică condiţiile de interpolabilitate de tip Lagrangen,

$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } i = 1; \\ 0, & \text{pentru } i \neq 1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{2} N_i(\xi) = 1. \tag{9}$$

În fig. 2 se prezintă interpretarea geometrică a interpolării liniare descrisă mai sus, unde se poate observa şi grafic că funcţiile de formă reprezintă ponderile absciselor nodale în abscisa unui punct oarecare P al elementului finit.

Aplicând algoritmul de mai sus şi pentru celelalte coordonate (ordonată şi cotă), se obţin relaţiile:

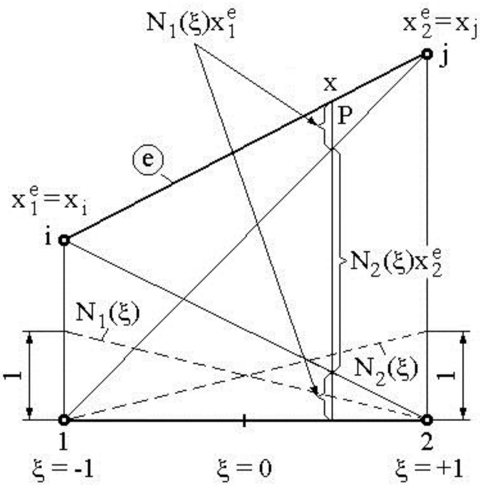

Fig. 2

$$y = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^e \\ y_2^e \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$z=\left[N_1(\xi)\quad N_2(\xi)\right]\begin{bmatrix} z_1^e \\ z_2^e \end{bmatrix}, \tag{11}$$

în care, $y_1^e = y_i$, $z_1^e = z_i$ şi $y_2^e = y_{i+1}$ şi $z_2^e = z_{i+1}$, pentru, i = 1, 2. … n-1.

Relaţiile (7), (10) şi (11) se pot scrie matriceal sub forma,

$$\left[\,\mathrm{p}\,\right]=\left[\mathrm{N}(\xi(\,\right]\left[\mathrm{p}^{\mathrm{e}}\right] \tag{12}$$

în care,

$$\left[\,\mathrm{p}\right]=\left[\mathrm{x}\quad \mathrm{y}\quad \mathrm{z}\right]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

este matricea coordonatelor globale ale unui punct oarecare al elementului finit;

$$\left[N(\xi)\right]=\begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix} \tag{14}$$

matricea funcţiilor de interpolare sau de formă:

$$\left[p^e\right]=\left[x_1^e\quad y_1^e\quad z_1^e\quad x_2^e\quad y_2^e\quad z_2^e\right]^T \tag{15}$$

matricea coordonatelor globale ale nodurilor elementului finit considerat.

Modelarea geometrică liniară a domeniului sau contururilor de tip linie are dezavantajul că micşorarea erorii de discretizare impune creşterea numărului de noduri adoptate preliminar. Evitarea acestui dezavantaj se poate realiza prin modelarea neliniară.

MEF-T.3.2.3 MODELAREA NELINIARĂ A DOMENIILOR TIP LINIE

Dacă rangul polinomului (1), r = 2, domeniul D (fig. 3) se aproximează cu domeniul D', compus din elemente finite unidimensionale neliniare parabolice (pătratice) cu trei noduri. Se asociază fiecărui element finit un element „părinte" trinodal, raportat la sistemul de coordonate ξ-naturale (fig. 3)

Abscisa unui punct oarecare P, din interiorul elementului finit e, cu nodurile extreme primare i, j – de conexiune cu elementele alăturate – şi nodul intern k, se determină cu relaţia,

$$x=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2 \tag{16}$$

Particularizând această relaţie, cu valorile coordonatelor corespunzătoare punctelor nodale, $x = x_i$, ξ = -1, $x = x_j$, $\xi = 1$, $x = x_k$, $\xi = 0$, rezultă sistemul

$$\begin{cases} x_i = c_0 - c_1 + c_2, \\ x_j = c_0 + c_1 + c_2, \\ x_k = c_0. \end{cases} \tag{17}$$

Soluţiile acestui sistem, constantele c_0, c_1 şi c_2, înlocuite în (13), determină

$$x=\frac{1}{2}\xi(\xi-1)x_i+\frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_j+\left(1-\xi^2\right)x_k \tag{18}$$

Notând cu,

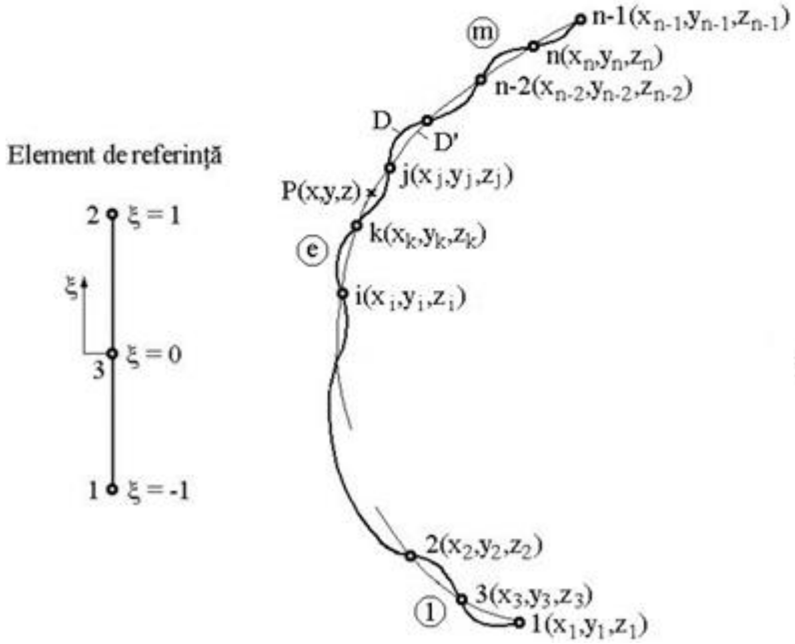

Fig. 3

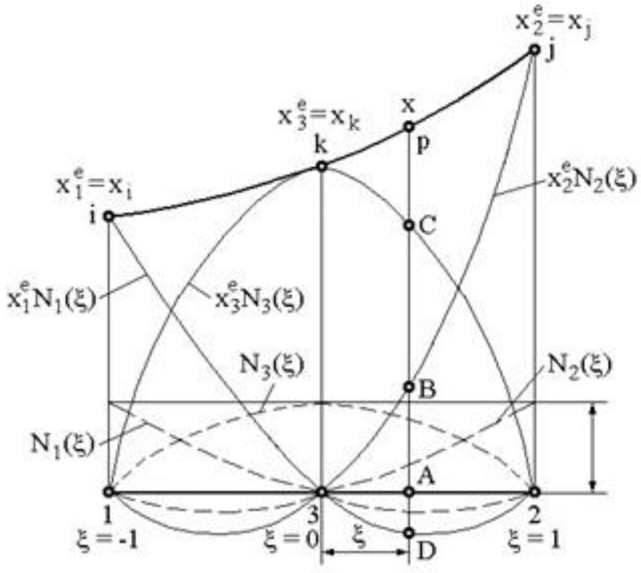

Fig. 4

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1),\ N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi),\ N_3(\xi) = 1 - \xi^2 \tag{19}$$

funcţiile de formă corespunzătoare elementului „părinte” considerat, relaţia (3.39) devine

$$x = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{bmatrix} \tag{20}$$

Unde, $x_1^e = x_{i-1}$, $x_2^e = x_{i+1}$, $x_3^e = x_i$, pentru, i = 1, 2 … n-1.

Interpolarea geometrică a funcţiilor de formă (19) şi a relaţiei (20) sintetizată în fig. 4. Coordonata x a unui punct oarecare P al elementului finit, dată de lungimea segmentului AP este suma lungimilor segmentelor AB, AC şi AD, care reprezintă aportul absciselor nodurilor elementului finit – dat de funcţiile de formă – asupra acesteia.

Similar, şi pentru celelalte coordonate, se obţin relaţiile:

$$x = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^e \\ y_2^e \\ y_3^e \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$x = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & N_3(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^e \\ z_2^e \\ z_3^e \end{bmatrix} \tag{22}$$

în care, $y_1^e = y_{i-1}$, $z_1^e = z_{i-1}, y_2^e = y_{i+1}, z_2^e = z_{i+1}, y_3^e = y_i, z_3^e = z_i$, cu i = 1, 2. … n-1.

Ţinând cont de relaţiile (20), (21) şi (22) se ajunge la relaţia de calcul a matricei coordonatelor globale ale unui punct oarecare P al elementului e (v. rel. (13)), similară cu relaţia (12) în care, pentru acest caz, matricea funcţiilor de formă este

$$[N(\xi)] = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & N_3(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & N_3(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & N_3(\xi) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

iar matricea coordonatelor nodale

$$[p^e] = [x_1^e \quad y_1^e \quad z_1^e \quad x_2^e \quad y_2^e \quad z_2^e \quad x_3^e \quad y_3^e \quad z_3^e]. \tag{24}$$

Expresiile funcţiilor de formă, date de relaţiile (19) se pot obţine şi prin particularizarea polinoamelor Lagrange, pentru elementul finit „părinte” considerat în acest caz.

Procesul de modelare cu funcţii neliniare poate fi extins şi pentru funcţii de aproximare cu rangul r > 2, folosind elemente finite cu noduri interne, al căror număr total de noduri este egal cu numărul de coeficienţi necunoscuţi al funcţiei de aproximare, adică r+1. În acest caz rezultă funcţii de formă cu expresii mai complicate.

Funcţiile aproximative ale coordonatelor punctelor domeniului considerat sunt funcţii continue şi nederivabile în punctele nodale. Se consideră că aceste funcţii aparţin clasei C^0.

Unele probleme rezolvabile cu MEF necesită aproximări ale domeniilor reale, cu funcţii care în nodurile interelemente sunt continue atât din punctul de vedere al valorilor nodale, cât şi din punctul de vedere al valorilor derivatelor nodale. În continuare, se reprezintă funcţii de aproximare de clasa C^1, care respectă şi continuitatea derivatei de ordinul întâi, numită continuitatea pantei.

Funcţiile de interpolare care asigură condiţiile clasei C^1 sunt polinoamele de tip Hermite. În acest caz domeniul de modelat se descrie prin noduri cu două seturi de parametri cunoscuţi – coordonatele şi derivatele – şi o funcţie de aproximare polinomială.

Pentru cazul domeniului D din fig. 5, considerând n noduri şi m elemente finite binodale se obţine domeniul aproximativ D’. Determinarea abscisei unui punct oarecare P, al unui element finit oarecare e, se realizează asociind acestuia un element finit „părinte”, în coordonate ξ-naturale (fig. 5), cu polinomul de aproximare,

$$x = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 \tag{25}$$

şi derivata acestuia,

$$x' = c_1 + 2c_2\xi + 3c_3\xi^2 \tag{26}$$

pentru $\xi \in [-1,\ 1]$. Ţinând cont că pentru $\xi = -1$ corespunde $x = x_i$, $x' = x'_i$ şi pentru $\xi = 1$ $x = x_j$, $x' = x'_j$, rezultă sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_i = c_0 - c_1 + c_2 - c_3, \\ x_j = c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \\ x'_i = c_1 - 2c_2 - 3c_3, \\ x'_j = c_1 + 2c_2 + 3c_3. \end{cases} \tag{27}$$

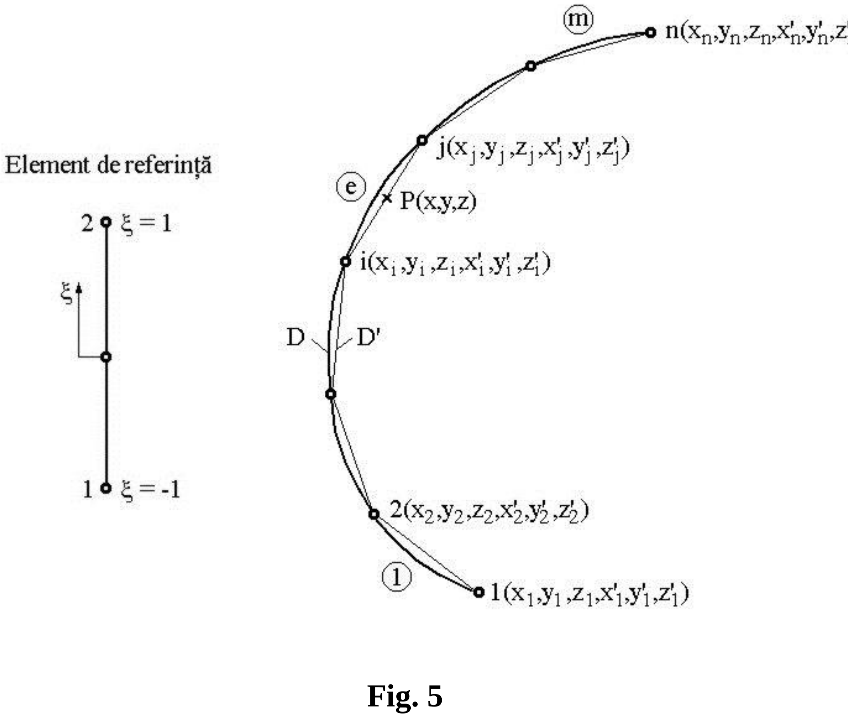

Fig. 5

Rezolvarea sistemului (27), în raport cu necunoscutele c_0, c_1, c_2 şi c_3, permite exprimarea relaţiei (25) în forma,

$$x = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)x_i + \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)x_j + \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)x'_i + \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1)x'_j \tag{28}$$

Relaţia (28), generalizată pentru toate elementele finite, se poate scrie sintetic sub forma,

$$x = [N_1(\xi) \quad N_2(\xi)]\begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \end{bmatrix} + [N_1'(\xi) \quad N_2'(\xi)]\begin{bmatrix} (x_1^e)' \\ (x_2^e)' \end{bmatrix} \tag{29}$$

unde:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)\,, \tag{30}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \tag{31}$$

$$N_1'(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi), \tag{32}$$

$$N_2'(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1), \tag{33}$$

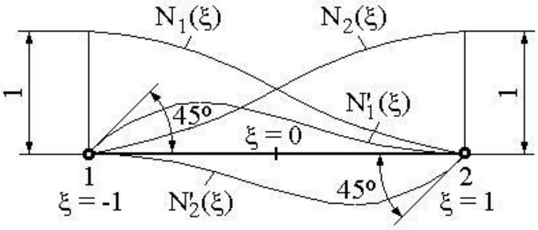

Fig. 6

sunt <u>funcţii de formă hermitiene, cubice</u> şi $x_1^e = x_i$, $x_2^e = x_{i+1}$, $(x_1^e)' = x_i'$, $(x_2^e)' = x_{i+1}'$ cu i = 1, 2. … n-1.

Reprezentarea grafică a funcţiilor de formă (30)…(33) se poate urmări în fig. 6.

Similar, se pot obţine relaţii de calcul şi pentru celelalte două coordonate (y şi z) ale punctului P. În final, matricea coordonatelor globale $[p] = [x\ y\ z]^T$ se exprimă prin,

$$[p] = [N(\xi)][p^e] + [N'(\xi)][(p^e)'] \tag{34}$$

unde:

$$[N(\xi)] = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix}, \tag{35}$$

$$[N'(\xi)] = \begin{bmatrix} N_1'(\xi) & 0 & 0 & N_2'(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_1'(\xi) & 0 & 0 & N_2'(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_1'(\xi) & 0 & 0 & N_2'(\xi) \end{bmatrix} \tag{36}$$

sunt matricele funcţiilor de formă; $[p^e]$ – matricea coordonatelor nodale, cu expresia (15);

$$[(\rho^e)'] = [(x_1^e)' \ (y_1^e)' \ (z_1^e)' \ (x_2^e)' \ (y_2^e)' \ (z_2^e)'] \tag{37}$$

matricea derivatelor nodale, ale cărei elemente reprezintă valorile cunoscute ale derivatei funcţiei (coordonate) de aproximat în cele două noduri ale elementului finit.