

MEF-T.3.1

SISTEME DE COORDONATE

CUPRINS

MEF-T.3.1.1 INTRODUCERE

MEF-T.3.1.2 SISTEME DE COORDONATE GLOBALE

MEF-T.3.1.3 SISTEME DE COORDONATE LOCALE

MEF-T.3.1.1 INTRODUCERE

Imaginea unui domeniu geometric se poate obține cu ajutorul calculatorului electronic, dacă se stabilește o formă de codificare numerică și/sau alfanumerică a geometriei acestuia, care să furnizeze toate datele necesare pentru descrierea acestuia.

În general, domeniile geometrice ale problemelor rezolvabile cu MEF pot fi: unidimensionale (1D), bidimensionale (2D) și/sau tridimensionale (3D). Pentru modelarea unui domeniu geometric se pot folosi: puncte, linii drepte sau curbe (muchii), suprafețe plane sau curbe (fețe) și/sau volume.

Modelarea geometrică a unui domeniu presupune, pentru început, alegerea în mod convenabil a unei mulțimi finite de puncte (noduri), situate în interiorul și pe conturul acestuia. Valorile coordonatelor acestor puncte, într-un sistem de coordonate adecvat, se stochează sub forma unor matrice. În plus, pentru descrierea celorlalte puncte cu un grad de aproximare determinat (controlat), este necesară, de asemenea, alegerea în mod convenabil a unor funcții de exprimare.

Acest algoritm de modelare geometrică se realizează de regulă pe subdomenii, cu alegerea convenabilă a trecerilor de la un subdomeniu la altul. Deci, pentru alegerea nodurilor și subdomeniilor este necesară operația de definire convenabilă a acestora, numită **discretizare**. Prin aceasta, domeniul continuu real se înlocuiește cu un domeniu idealizat discret, compus din subdomenii mai mici, numite **elemente finite**.

Contururile elementelor finite pot fi: puncte (noduri), linii drepte sau curbe (linii nodale) și suprafețe plane sau curbilinii (suprafețe nodale). În fig. 1 se prezintă domeniul bidimensional D, discretizat în elemente finite triunghiulare, cu laturi linii drepte (fig. 1.a) sau laturi curbilinii (fig. 1.b). În primul caz, al elementelor finite cu laturi linii drepte, eroarea de discretizare poate fi micșorată prin mărirea numărului de noduri și deci implicit al numărului elementelor. În cel de-al doilea caz, eroarea de discretizare poate fi micșorată și datorită frontierelor curbilinii ale elementelor finite.

Alegerea numărului de puncte nodale (dimensiunea elementului finit) și a tipului elementelor finite este o problemă complexă asupra căreia se va reveni ulterior, după ce se vor introduce și alte noțiuni legate de acestea.

În vederea modelării geometrice a domeniilor spațiale dar și a parametrilor fizici, frecvent se folosesc două tipuri de sisteme de coordonate referință:

- sisteme de coordonate globale, la care se raportează întregul domeniu al problemei,
- sisteme de coordonate locale, asociate unui subdomeniu sau chiar unui element finit al domeniului problemei.

MEF-T.3.1.2 SISTEME DE COORDONATE GLOBALE

Punctele domeniului problemei de rezolvat, în cazul MEF, se descriu, de regulă, folosind următoarele sisteme de coordonate: cartezian (fig. 1,a), cilindric (fig. 1,b) și/sau sferic (fig. 1,c).

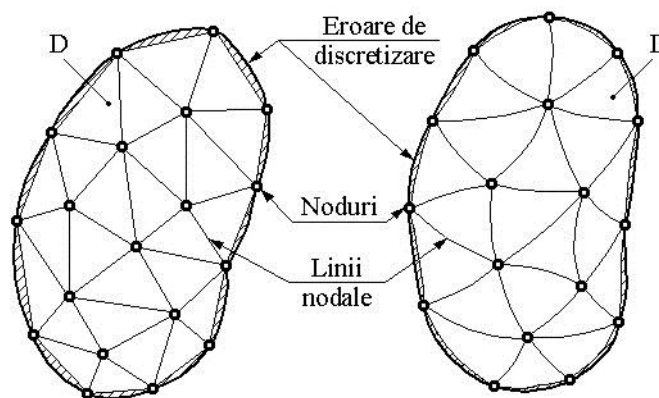


Fig. 1

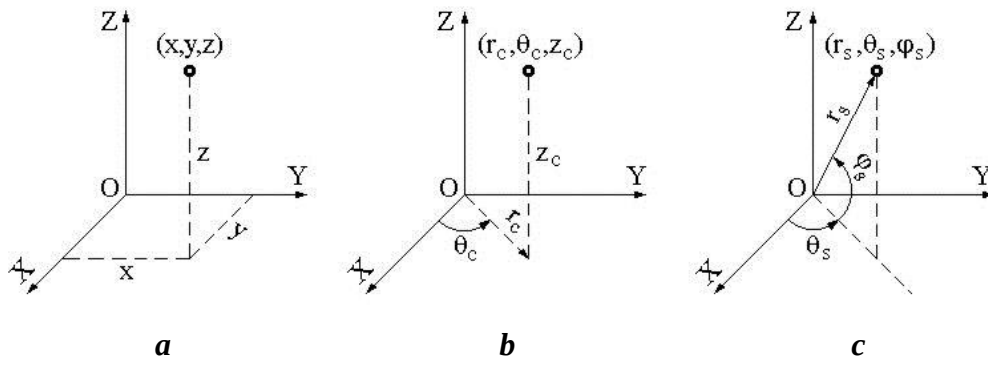


Fig. 1

AFF-T.3.1.3 SISTEME DE COORDONATE LOCALE

Simplificarea definiției domeniului și a algoritmilor de calcul sunt posibile, în cazul analizei cu MEF, prin folosirea sistemelor de coordonate locale, asociate unor subdomenii sau chiar elementelor finite. Aceste sisteme de coordonate pot fi coordonate generale (carteziene, cilindrice, sferice), nespecifice elementului finit respectiv sau coordonate naturale (parametrice), specifice elementului finit considerat.

Sisteme de coordonate locale generale

Sistemele de coordonate locale generale (carteziene, cilindrice, sferice) au originea într-un punct al subdomeniului sau al elementului finit și se deosebesc de sistemele de coordonate globale prin poziția și orientarea lor. Aceste sisteme de coordonate se obțin transformând, prin translații și/sau rotații, sistemul de coordonate global (tab. 1).

În cazul domeniului D (fig. 2), raportat la sistemul de coordonate global OXYZ, se consideră subdomeniul D', raportat la sistemul de coordonate local O'X'Y'Z'. Pentru calculul corespondenței dintre coordonatele punctului P al subdomeniului D', în cele două sisteme de referință, se consideră translația sistemului global din O în O' și rotația oarecare a acestuia [Dogaru, 1988].

Rotația sistemului de coordonate local se poate descompune la rândul ei în trei rotații succesive, cu unghiurile c, b și a după axele OZ, OY și, respectiv, OX, ale sistemului triortogonal global. Coordonatele (x, y, z) ale punctului P față de sistemul de coordonate global, cunoscând coordonatele (x', y', z') ale aceluiași punct față de sistemul de coordonate local, se poate calcula cu relația

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & \sin(a) \\ 0 & -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}}_{R_{ox}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} \quad (1)$$

sau

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}, \quad (2)$$

în care: m, n, p reprezintă coordonatele punctului O' în raport cu sistemul de coordonate OXYZ; $r_{11} = \cos(c)\cos(b)$, $r_{12} = \sin(c)\cos(a) + \cos(c)\sin(b)\sin(a)$, $r_{13} = \sin(c)\sin(a) - \cos(c)\sin(b)\cos(a)$, $r_{21} = \sin(c)\cos(b)$, $r_{22} = \cos(c)\cos(a) - \sin(a)\sin(b)\sin(c)$, $r_{23} = \cos(c)\sin(a) + \sin(c)\sin(b)\cos(a)$, $r_{31} = \sin(b)$, $r_{32} = -\cos(b)\sin(a)$, $r_{33} = \cos(b)\cos(a) -$ elementele matricei de rotație generală.

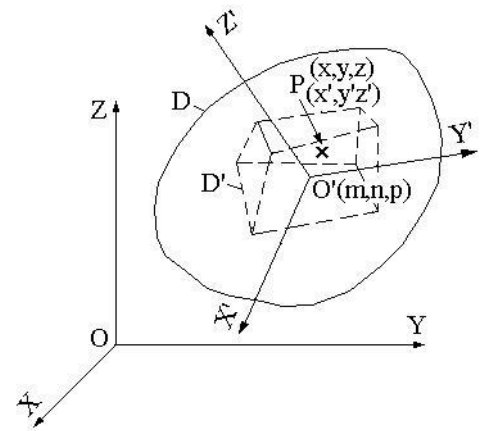


Fig. 2

Tab.1

	x, y, z	r_c, θ_c, z_c	r_s, θ_s, φ_s
x	x	$r_c \cos \theta_c$	$r_s \cos \varphi_s \cos \theta_s$
y	y	$r_c \sin \theta_c$	$r_s \cos \varphi_s \sin \theta_s$
z	z	z_c	$r_s \sin \varphi_s$
r_c	$\sqrt{x^2 + y^2}$	r_c	$r_s \cos \varphi_s$
θ_c	$\frac{\pi}{2}$, pentru $x=0, y>0$; $\frac{3\pi}{2}$, pentru $x=0, y<0$; $\arctg \frac{y}{x} + k\pi$, pentru $x \neq 0$, cu $\begin{cases} k=0, \text{ pentru } x>0, y>0; \\ k=1, \text{ pentru } x<0; \\ k=2, \text{ pentru } x>0, y<0. \end{cases}$	θ_c	θ_s
z	z	z	$r_s \sin \varphi_s$
r_s	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\frac{r_c}{\cos \varphi_c}$	r_s
θ_s	$\frac{\pi}{2}$, pentru $x=0, y>0$; $\frac{3\pi}{2}$, pentru $x=0, y<0$; $\arctg \frac{y}{x} + k\pi$, pentru $x \neq 0$, cu $\begin{cases} k=0, \text{ pentru } x>0, y>0; \\ k=1, \text{ pentru } x<0; \\ k=2, \text{ pentru } x>0, y<0. \end{cases}$	θ_c	θ_s
φ_s	$-\frac{\pi}{2}$, pentru $x^2+y^2=0, z<0$; $\frac{\pi}{2}$, pentru $x^2+y^2=0, z>0$; $\arctg \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pentru $x^2+y^2 \neq 0$.	$\frac{\pi}{2}$, pentru $r_c=0, z_c>0$; $\frac{3\pi}{2}$, pentru $r_c=0, z_c<0$; $\arctg \frac{z_c}{r_c} + k\pi$, pentru $r_c \neq 0$, cu $\begin{cases} k=0, \text{ pentru } r_c>0, z_c>0; \\ k=1, \text{ pentru } r_c<0; \\ k=2, \text{ pentru } r_c>0, z_c<0. \end{cases}$	φ_s

În relația (1), cele trei matrice pătratice, R_{OZ} , R_{OY} , R_{OX} , modelează rotirile sistemului de coordonate local în jurul axelor OZ, cu unghiul c , OY cu unghiul b , și, respectiv, OX, cu unghiul a . deoarece matricea de rotație generală, din relația (2), se obține ca produs de matrice și acesta este necumulativ, transformarea este complet definită când pe lângă setul de valori (a, b, c) se cunoaște și ordinea în care se aplică rotirile după cele trei axe.

Sisteme de coordonate locale naturale

Coordonatele naturale sunt coordonate normalizate (adimensionale sau parametrizate), care se obțin prin raportarea variabilelor de tip lungime, arie sau volum, determinate în funcție de coordonatele globale, la mărimi caracteristice ale elementului finit de același tip, reprezentate de asemenea în funcție de coordonatele globale.

Originea sistemului de coordonate natural poate fi fixată în centrul elementului finit, când valorile coordonatelor aparțin $[-1, 1]$, sau pe frontiera elementului finit (nod, muchie, față), când valorile coordonatelor aparțin nivelului $[0, 1]$. În primul caz, sistemul de coordonate se numește cu coordonate ξ -naturale, iar în al doilea caz, cu coordonate L-naturale.

Pentru elementul finit unidimensional, raportat la sistemul de referință global OX (fig. 3,a) se pot atașa sistemul de referință în coordonatele ξ -naturale, cu originea în centrul elementului finit (fig. 3,b) sau sistemul de coordonate L-naturale, cu originile în nodurile elementului finit (fig. 3,c). Ținând cont de notațiile din fig. 3,a,b coordonata globală a unui punct oarecare, aparținând elementului finit considerat, în funcție de coordonata locală corespunzătoare, se poate calcula cu relația

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} + \xi \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad (3)$$

sau sub formă matriceală,

$$x = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

în care x_1 și x_2 reprezintă coordonatele globale ale celor două noduri care delimitează elementul finit.

În cazul sistemului local de coordonate L-naturale, pentru un punct oarecare de coordonată globală x , se pot scrie relațiile:

$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2,$$

$$L_1 + L_2 = 1,$$

din care rezultă,

$$L_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (7)$$

coordonatele naturale, ca rapoarte între lungimile segmentelor de dreaptă P2, 1P și lungimea segmentului 12.

Relația (5) în formă matriceală devine,

$$x = [L_1 L_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Domeniile bidimensionale se pot discretiza în elemente finite de tip patrulater sau triunghi.

Coordonatele locale ξ -naturale, pentru un element finit patrulater, sunt reprezentate în fig. 4. Aplicând succesiv algoritmul prezentat în cazul elementului finit unidimensional, pentru muchiile 12, 43 și segmentul AB (fig. 3.5), se pot scrie relațiile:

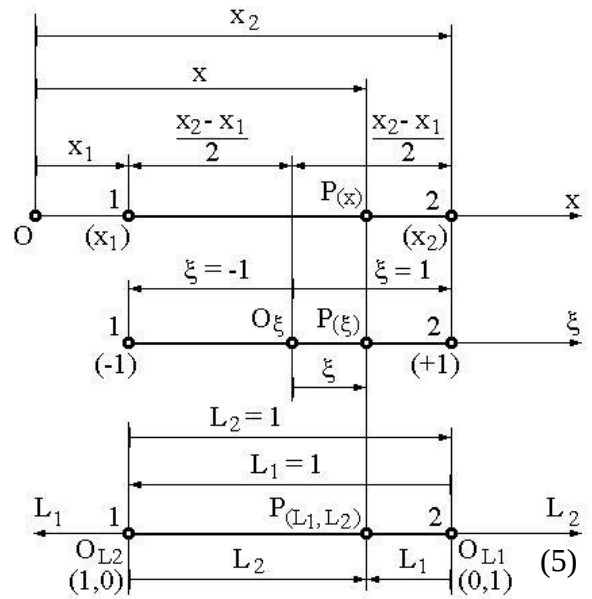


Fig. 3

(6)

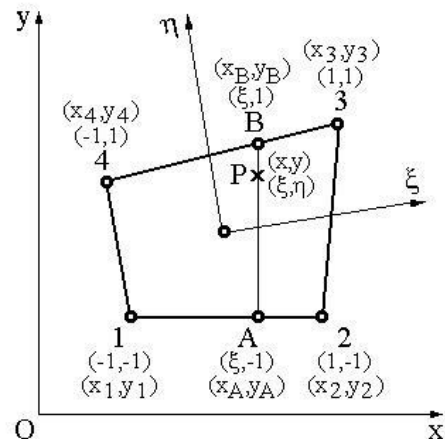


Fig. 4

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \frac{1-\xi}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \frac{1+\xi}{2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \frac{1-\xi}{2} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} + \frac{1+\xi}{2} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1-\eta}{2} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \frac{1+\eta}{2} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Prin înlocuirea relațiilor (9) și (10) în (11), rezultă relațiile de calcul al coordonatelor globale (x, y) ale unui punct oarecare P al elementului finit, în funcție de coordonatele locale (ξ, η) și coordonatele nodurilor, cu forma

$$u = \left[\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

cu $u = x$ sau $u = y$.

Poziția punctelor elementului finit triunghiular (fig. 5) este posibil să se definească prin intermediul coordonatelor L-naturale. Între datele cunoscute – coordonatele nodurilor în cele două sisteme (global și local) – și coordonatele unui punct oarecare P, se pot scrie următoarele relații:

$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3, \quad (13)$$

$$y = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3, \quad (14)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3, \quad (15)$$

care formează un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, coordonatele naturale L_1 , L_2 și L_3 . Relația (15) arată că numai două din cele trei coordonate sunt independente.

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (13), (14) și (15), rezultă,

$$L_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad L_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad L_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}. \quad (16)$$

Se observă că prin rearanjare relațiile (16) devin,

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad (17)$$

Unde, A_1 , A_2 , A_3 s-au notat ariile triunghiurilor formate de punctul P cu cele trei muchii ale elementului finit. Astfel, se observă că originea coordonatelor este pe laturile elementului și în nodurile opuse coordonatele respective au valoarea 1.

Relația sintetică de calcul a coordonatelor globale ale unui punct oarecare P, ținând cont de relațiile (13) și (14) și notând cu x sau y cu u, este

$$u = [L_1 \ L_2 \ L_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

În cazul general al domeniilor tridimensionale, se utilizează frecvent elemente finite de tip hexaedru sau tetraedru. Pentru elementul finit hexaedru (fig. 6), se scrie relația

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

obținută aplicând același algoritm ca în cazurile precedente. Această relație modelează dependența dintre coordonatele globale x, y și z , notate cu u , și coordonatele ξ -naturale ale unui punct oarecare P al elementului finit hexaedru.

Elementelor finite tetraedrale li se asociază frecvent sistemul de coordonate L -naturale (fig. 7) și, similar cu cazurile precedente, aplicând același algoritm, rezultă următoarea relație,

$$u = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

în care,

$$L_i = \frac{V_i}{V}, \quad (21)$$

cu $i = 1, 2, 3, 4$ reprezintă volumele tetraedrelor obținute combinând punctul oarecare P cu fiecare față a elementului finit; $u = x$ sau $u = y$.

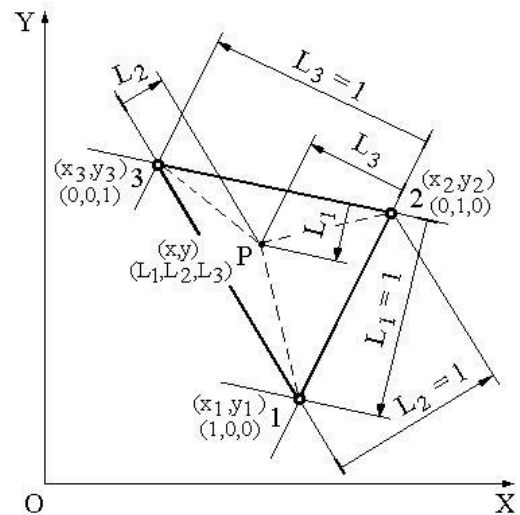


Fig. 5

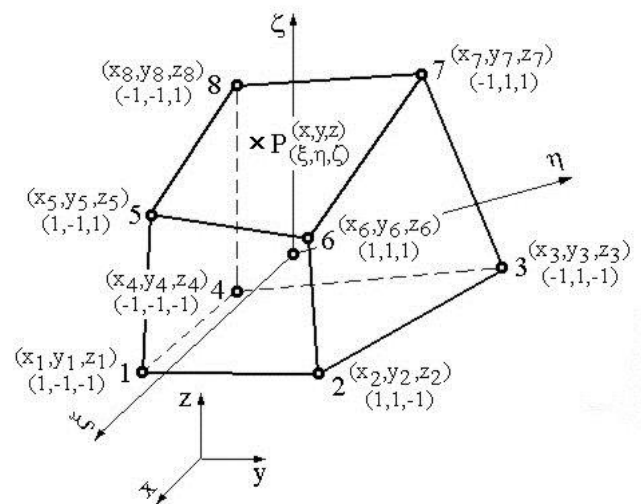


Fig. 6

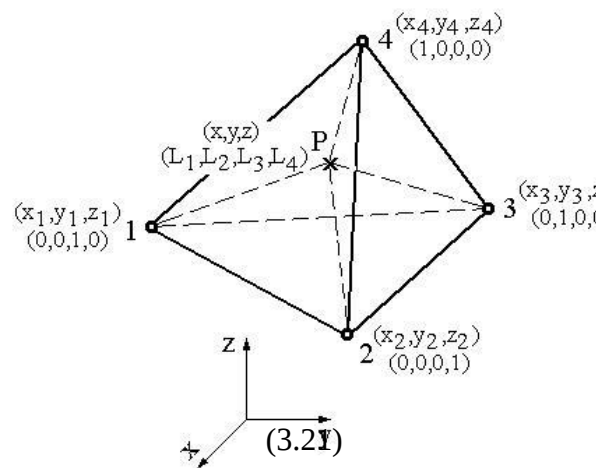


Fig. 7