

MEF-T.2.1

PROBLEME DE CÂMPURI MECANICE ÎN MEDII SOLIDE

CUPRINS

MEF-T.2.1.1	INTRODUCERE
MEF-T.2.1.2	ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII LINIARE
MEF-T.2.1.3	STAREA PLANĂ DE TENSIUNI
MEF-T.2.1.4	STAREA PLANĂ DE DEFORMAȚII
MEF-T.2.1.5	STAREA DE TENSIUNI AXIAL-SIMETRICĂ
MEF-T.2.1.6	STĂRI DE TENSIUNI SPECIFICE PLĂCILOR ȘI ÎNVELIȘURILOR
MEF-T.2.1.7	STAREA DE TENSIUNI DIN BARELE SOLICITATE AXIAL
MEF-T.2.1.8	STAREA DE TENSIUNI DIN BARELE SOLICITATE TRANSVERSAL (LA ÎNCOVOIERE)
MEF-T.2.1.9	LUCRUL MECANIC ȘI ENERGIA DE DEFORMAȚIE
MEF-T.2.1.10	TEOREMA EXTREMULUI ENERGIEI POTENȚIALE
MEF-T.2.1.11	TEOREMA LUI HAMILTON

MEF-T.2.1.1 INTRODUCERE

Marea diversitate a problemelor de teoria elasticității, care necesită rezolvare în vederea proiectării eficiente a sistemelor mecanice, se reflectă sugestiv și convingător în multitudinea metodelor de calcul existente. Elementele componente (organele de mașini) ale sistemelor mecanice (mașini, instalații, utilaje, dispozitive etc.) au forme complexe și sunt în interacțiuni caracterizate de legături diverse; în cadrul lucrării de față acestea se vor numi structuri.

În comparație cu metodele analitice, metodele numerice de calcul au avantajul de a fi aplicabile și penau analiza unor structuri neîncadrabile în structurile cu geometrie standard (bară, placă, bloc), întâlnite la rezistența materialelor. În general, structurile pot fi privite și ca un ansamblu de structuri geometrice standard.

MEF a fost aplicată inițial pentru calculul unor structuri mecanice de aeronave. Aceasta justifică faptul că în domeniul structurilor mecanice programele de analiză care au la bază MEF sunt cele mai evolute.

MEF-T.2.1.2 ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII LINIARE

Se consideri un corp oarecare (fig. 1,a), de volum V , suprafață și cu suprafața de legătură cu un alt corp S_r . Asupra corpului acționează următoarele sarcini exterioare: forțele generalizate (forță sau moment) P_i concentrate în punctele $i = 1, 2, \dots, m$ și forțele distribuite $p(x, y, z)$, după o lege oarecare pe suprafața S_p .

În interiorul structurii corpului se consideră efectul forțelor masice (de greutate și/sau inerțiale) care într-un punct oarecare, $P(x, y, z)$, au componentele g_x, g_y, g_z (fig. 1,b). Sub acțiunea acestor încărcări în structură apare tensiunea σ , cu componentele normale $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ componentele tangențiale $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ (legea dualității tensiunilor tangențiale), în raport cu sistemul triortogonal drept $Oxyz$. Starea de tensiuni dintr-un punct se poate sintetiza într-o matrice coloană

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

sau de tensorul de ordinul doi,

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2)$$

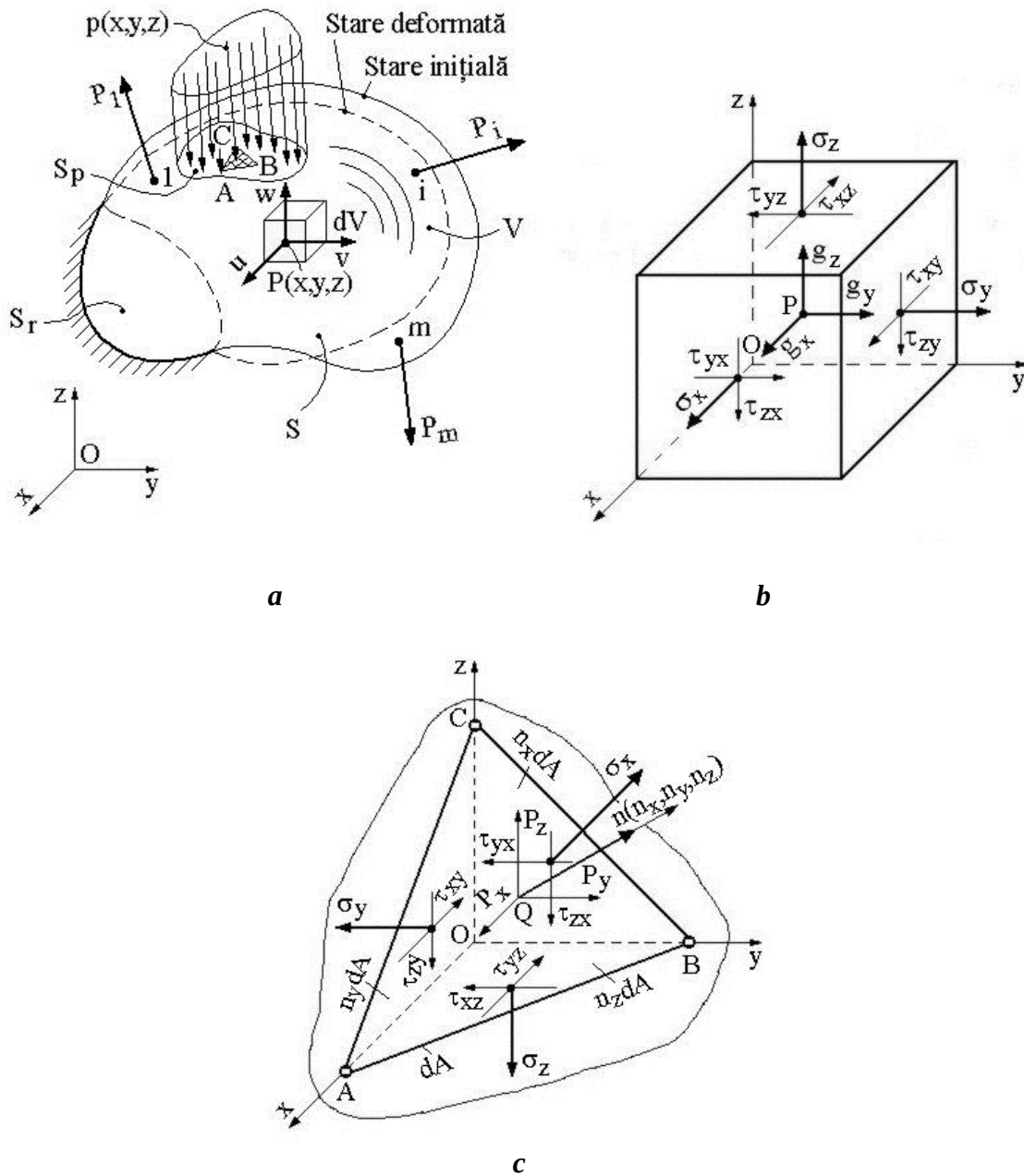


Fig. 1

Sub acțiunea sarcinilor prezentate, corpul se deformează elastic punctele corpului își modifică poziția și realizează deplasări în concordanță cu legăturile corpului. În punctul oarecare $P(x,y,z)$, componentele deplasării totale $d(x, y, z)$ sunt: $u(x, y,z)$, după axa x , $v(x, y,z)$, după axa y și $w(x,y,z)$, după axa z . Deci, vectorul deplasărilor are următoarea formă

$$[d] = [u \quad v \quad w]^T. \quad (3)$$

Starea de deformare a corpului se poate cuantifica prin intermediul deformațiilor specifice liniare (lungiri sau scurtări) $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, și deformațiilor specifice unghiulare (lunecări), $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, sintetizate în matricea coloană

$$[\epsilon] = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (4)$$

sau în tensorul de ordinul doi,

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Tensiunile, deplasările și deformațiile sunt funcții continue, necunoscute dependente.

În continuare, se prezintă aspecte de teoria elasticității considerând că materialul are comportare liniar elastică și structura se deformează foarte puțin (*ipoteza deplasărilor mici*), astfel încât ecuațiile de echilibru se descriu pentru structura nedeformată.

Între componentele matricelor tensiunilor, deplasărilor și deformațiilor există următoarele dependențe [Bezuhov, 1957]:

- **ecuațiile geometrice**

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (6)$$

- **ecuațiile de echilibru**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho g_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

- **ecuațiile fizice** (legea generalizată a lui Hooke):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_z), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (8)$$

În aceste relații, numite și *ecuațiile de bază ale teoriei elasticității*, s-a notat cu: ρ –densitatea materialului, E - modulul de elasticitate longitudinală, ν - coeficientul contracției transversale (Poisson) și t – timpul.

Relațiile (6), (7) și (8) formează un sistem de 15 ecuații diferențiale cu 15 necunoscute: componentele matricei tensiune ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$), componentele matricei deplasare (u, v, w) și componentele matricei deformație ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$). Aceste necunoscute sunt funcții de variabilele independente x, y, z și t . În acest caz, problema de rezolvat are gradul maxim de generalitate și presupune analiza dinamică structurii. Dacă se neglijează forțele de inerție temporale, termenii liberi ai ecuațiilor (7) se consideră nuli și problema este de *analiză statică* cu funcțiile necunoscute dependente numai de variabilele spațiale x, y, z .

Ecuațiile diferențiale (6) permit *analiza neliniară a structurilor cu deformații mari*, prin considerarea termenilor de ordinul doi. Dacă se neglijează acești termeni, modelul este potrivit pentru analiza liniară a structurilor cu deplasări mici.

În forma matriceală, *relațiile de bază ale teoriei elasticității*, pentru analiza statică liniară, au următoarele forme:

$$[\varepsilon] = [D_\varepsilon][d], \quad (9)$$

$$[T_\sigma][D_\sigma] + \rho[g] = [0], \quad (10)$$

$$[\sigma] = [E][\varepsilon], \quad (11)$$

unde $[D_\sigma]$ și $[D_\varepsilon]$ sunt operatorii diferențiali, cu expresiile:

$$[D_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [D_\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$[E]$ este matricea de elasticitate, cu expresia

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$[g]$ - matricea coloană a forțelor masice, cu forma

$$[g] = [g_x \quad g_y \quad g_z]^T. \quad (14)$$

Este posibil, în practică, ca în structura de analizat să existe *stări inițiale de tensiuni și/sau deformații*, cauzate de tehnologiile de fabricație și de montaj și de condițiile de exploatare. Luarea în considerare a tensiunilor și deformațiilor inițiale se realizează prin completarea relației (11), astfel

$$[\sigma] = [E][\varepsilon] + [\sigma_0] - [E][\varepsilon_0], \quad (15)$$

unde $[\sigma_0]$ și $[\varepsilon_0]$ reprezintă matricele tensiunilor inițiale și, respectiv, deformațiilor inițiale. Semnul minus din această relație indică sensul opus al deformațiilor inițiale în raport cu deformațiile curente. În majoritatea situațiilor, există numai unul din termenii stării inițiale de tensiuni sau de deformații, dar este posibil ca aceeași structură să fie supusă simultan unei stări inițiale de deformații datorată unei cauze și unei stări inițiale de tensiuni generată de altă cauză.

Pentru situația existentei *câmpului termic* descris de variația temperaturii $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$ matricea tensiunilor termice inițiale se calculează cu relația,

$$[\sigma_0] = \frac{\alpha \Delta T E}{1 - 2\nu} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

în care α este coeficientul de dilatare termică al materialului structurii.

Condițiile limită geometrice presupun *deplasări cunoscute* (date) pentru unele puncte ale structurii. De exemplu, pentru cazul din fig. 1,a, se consideră egale cu zero deplasările corespunzătoare punctelor din zona de legătură de suprafață S_r . Matematic aceasta se scrie sub forma,

$$[d]_m = [0], \quad (17)$$

pentru orice punct $M \in S_r$.

Condițiile limită statice rezultă din ecuațiile de echilibru corespunzătoare elementelor de volum din zona de frontieră, unde acționează forțele generalizate exterioare, distribuite. Astfel, pentru structura din fig. 1,a, într-un punct oarecare Q al suprafeței S_p , în care acționează forța cu distribuția p cunoscută (v. fig. 1,c), se pot scrie următoarele ecuații de echilibru static (condiții limită):

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= p_x, \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= p_y, \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z &= p_z, \end{aligned} \quad (18)$$

în care p_x, p_y, p_z , sunt componentele forței distribuite p și n_x, n_y, n_z - cosinușii directori ai normalei n la suprafața S_p , în punctul considerat Q .

Rezolvarea problemei generale a teoriei elasticității, descrisă de ecuațiile diferențiale și condițiile limită de mai sus, se poate realiza prin alegerea preliminară a unui set de necunoscute care urmează a fi determinate în prima etapă și apoi în a doua etapă se determină celelalte necunoscute. Astfel, se pot considera ca necunoscute primare componentele matricei tensiune (**metoda tensiunilor**) sau ale matricei deplasare (**metoda deplasărilor**), ca funcții continue de variabilele independente, coordonatele x, y, z ale punctelor structurii. Cea de-a doua metodă (rezolvarea problemei de elasticitate în raport cu deplasările) este aplicată frecvent în practică datorită simplității matematice, având un număr mai mic de ecuații. Prin transformarea ecuațiilor diferențiale (6) (7) și (8), rezultă următoarele ecuații fundamentale ale teoriei elasticității (ecuațiile lui Lamé), exprimate în funcție de deplasări:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u + \rho g_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v + \rho g_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w + \rho g_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

în care,

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (20)$$

reprezintă constantele lui Lamé

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (21)$$

deformația specifică volumică;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

operatorul lui Laplace.

Integrarea analitică a ecuațiilor (19), respectând condițiile de frontieră (17) și (18), pentru cazul general, este dificilă, uneori chiar imposibil de realizat. Atât în cazul metodelor rezistenței materialelor cât și în cazul MEF, pentru simplitate și deci, pentru eficiență, se preferă, în condiții acceptabile, cazurile particulare. În continuare, se prezintă cazurile particulare ale stărilor de tensiune și deformație spațială, frecvent întâlnite și în analiza structurilor cu programe performante, care au la bază MEF.

MEF-T.2.1.3 STAREA PLANĂ DE TENSIUNI

Starea de tensiune plană se caracterizează prin existența unor tensiuni cvasiuniforme pe elemente de arie caracterizate de normale paralele cu aceeași direcție. Această situație se întâlnește, de exemplu, în cazul tuburilor de revoluție cu pereți groși, de lungime mică în raport cu diametrul, solicate de presiuni la interior și/sau exterior (fig. 2,a) sau în cazul elementelor de tip placă cu grosime constantă, de valoare mică în raport cu celelalte două dimensiuni, și solicate de forțe în planul plăcii (fig. 2,b). În aceste cazuri se consideră $\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$ și matricea tensiunilor $[\sigma] = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T$ (fig. 2, c). Ținând cont de ipotezele de mai sus, din relațiile (2.8) rezultă $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{zx} = 0$ și în continuare, considerând $\varepsilon_z = 0$, rezultă matricea de elasticitate (v. (13)) corespunzătoare stării de tensiune plană,

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

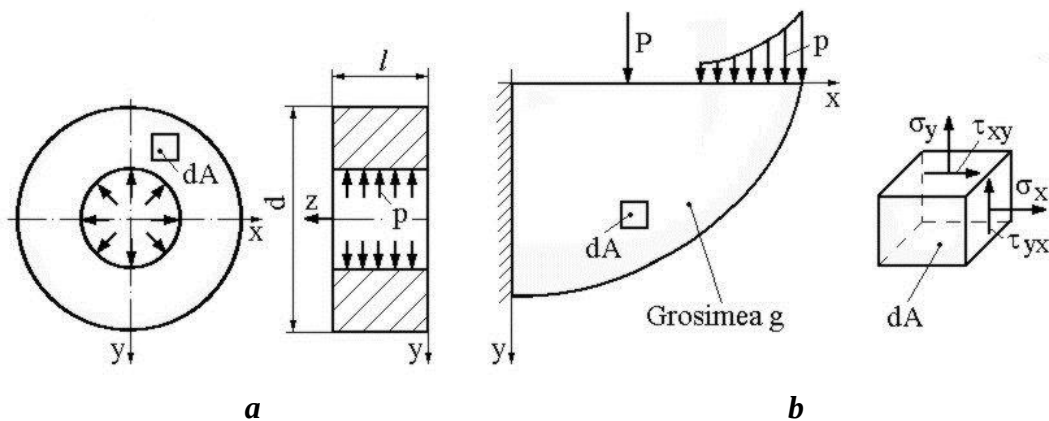


Fig. 2

MEF-T.2.1.4 STAREA PLANĂ DE DEFORMAȚII

Starea de deformație plană este caracterizată de deformații specifice nule pe elemente de arie cu normalele paralele cu o direcție fixă. Se exemplifică această situație prin structurile de tip tub de revoluție, or

lungimea, l , mare în raport cu diametrul d , solicitate uniform la interior și/sau exterior (fig. 3,a) sau prin structurile de tip placă, cu grosimea mare în raport cu celelalte două dimensiuni, încărcate cu forțe distribuite constante, în planul xOz (fig. 3,b). În aceste situații, deplasările în planul xOy sunt independente de coordonata longitudinală z , iar deplasarea longitudinală este egală cu zero. Astfel, pentru o felie de grosime unitară, considerând $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{zx} = 0$, din relațiile (8) rezultă $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$. Neglijând tensiunea σ_z din relațiile (8), rezultă o relație de forma (11), în care, $[\sigma] = [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T$, $[\varepsilon] = [\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}]^T$ și

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

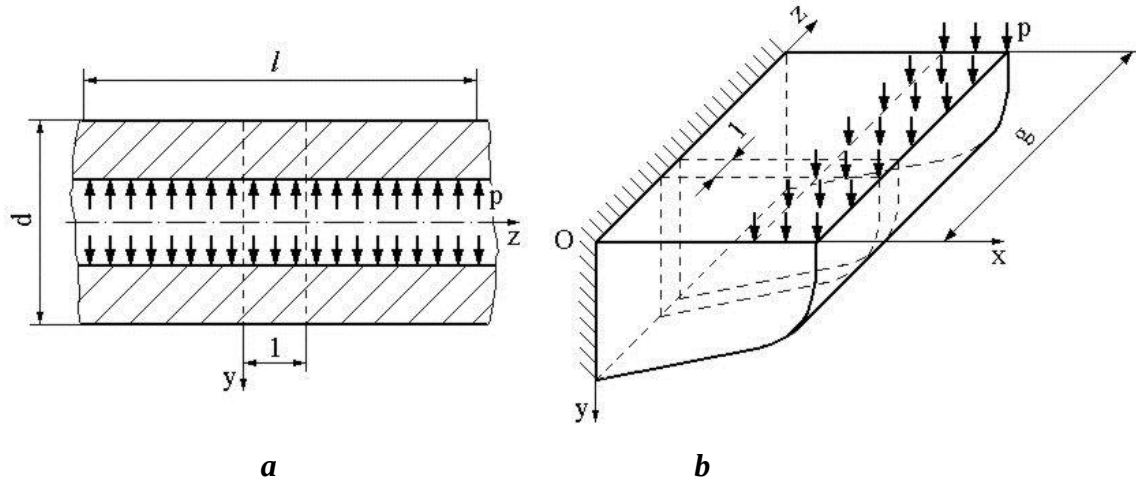


Fig. 3

MEF-T.2.1.5 STAREA DE TENSIUNI AXIAL-SIMETRICĂ

Stare de tensiune axial-simetrică este caracteristică structurilor cu o axă de simetrie comună pentru geometrie, proprietățile materialului și pentru încărcare (fig. 4,a). Ca urmare, deplasările, deformațiile și tensiunile, pentru punctele aceluiași cerc sunt constante. Având în vedere aceste proprietăți, raportarea parametrilor geometrici și fizici ai structurii la un sistem de coordonate cilindric (fig. 4,b) conduce la forme simplificate ale ecuațiilor diferențiale. Ecuațiile geometrice și fizice ale teoriei elasticității, pentru structura descrisă, în urma transformărilor, devin:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ w \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Din relația (26), având în vedere (11) se identifică cu ușurință matricea de elasticitate $[E]$, necesară rezolvării cu MEF a acestei probleme.

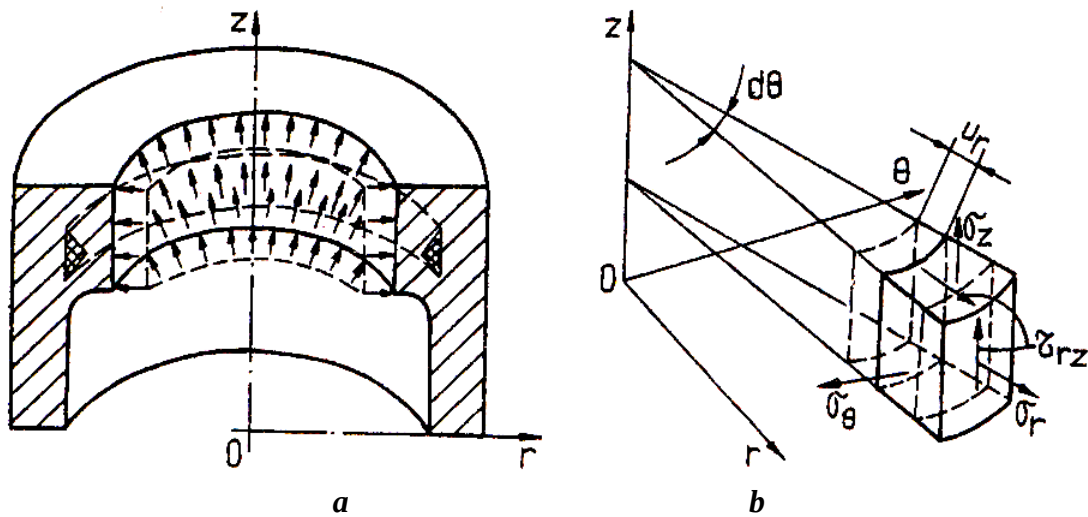


Fig. 4

MEF-T.2.1.6 STĂRI DE TENSIUNI SPECIFICE PLĂCILOR ȘI ÎNVELIȘURILOR

Structurile de tip placă sau înveliș se întâlnesc în diverse aplicații ingineresti, ca de exemplu: pereții recipientelor, învelișurile navelor, fuselajele aeronavelor etc. În fig. 5 este prezentat cazul general al unui element infinitezimal detașat dintr-o placă curbă de grosime h , cu centrele de curbură O_1 și O_2 și razele de curbură r_x și r_y [Ivan, 1985; Pascariu, 1985]. În funcție de valorile maxime ale rapoartelor h/r_x și h/r_y , se poate aprecia grosimea plăcii. Astfel, dacă $\max(h/r_x, h/r_y) > 0,05$, placa se consideră groasă și dacă $\max(h/r_x, h/r_y) \leq 0,05$ aceasta se consideră subțire. În practică, marea majoritate a plăcilor au $\max(h/r_x, h/r_y) \in [0,001; 0,02]$, deci sunt considerate ca fiind placi subțiri și se pot face simplificări ale ecuațiilor geometrice și de echilibru, care favorizează atât calculele analitice cât și pe cele numerice cu elemente finite. Grosimea fiind relativ mică se consideră că deplasările de-a lungul liniei normale la suprafața mediană a elementului de placă sunt mici și aportul deformației specifice ε_z la energia totală de deformație este nul. În consecință, se poate considera și $\sigma_z = 0$.

Există un mare număr de metode pentru analiza diferitelor tipuri specifice de plăci și învelișuri, diferențiate după ipotezelor introduse cât și după formularea condițiilor limită.

În continuare, se prezintă cea mai des utilizată metodă, care are la bază, pe lângă ipoteza prezentată mai sus, și ipoteza lui Kirchhoff, potrivit căreia liniile drepte și normale pe suprafața mediană a plăcii înainte de deformare rămân la fel și după deformare. Deci, se poate considera: $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$ și $\gamma_{zx} = 0$. După particularizări și transformări, ecuațiile de bază ale teoriei elasticității, aplicate elementului de placă infinitezimal, iau formele prezentate, în continuare:

- **ecuațiile geometrice:**

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

(27)

- **ecuațiile fizice și de echilibru static:**

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

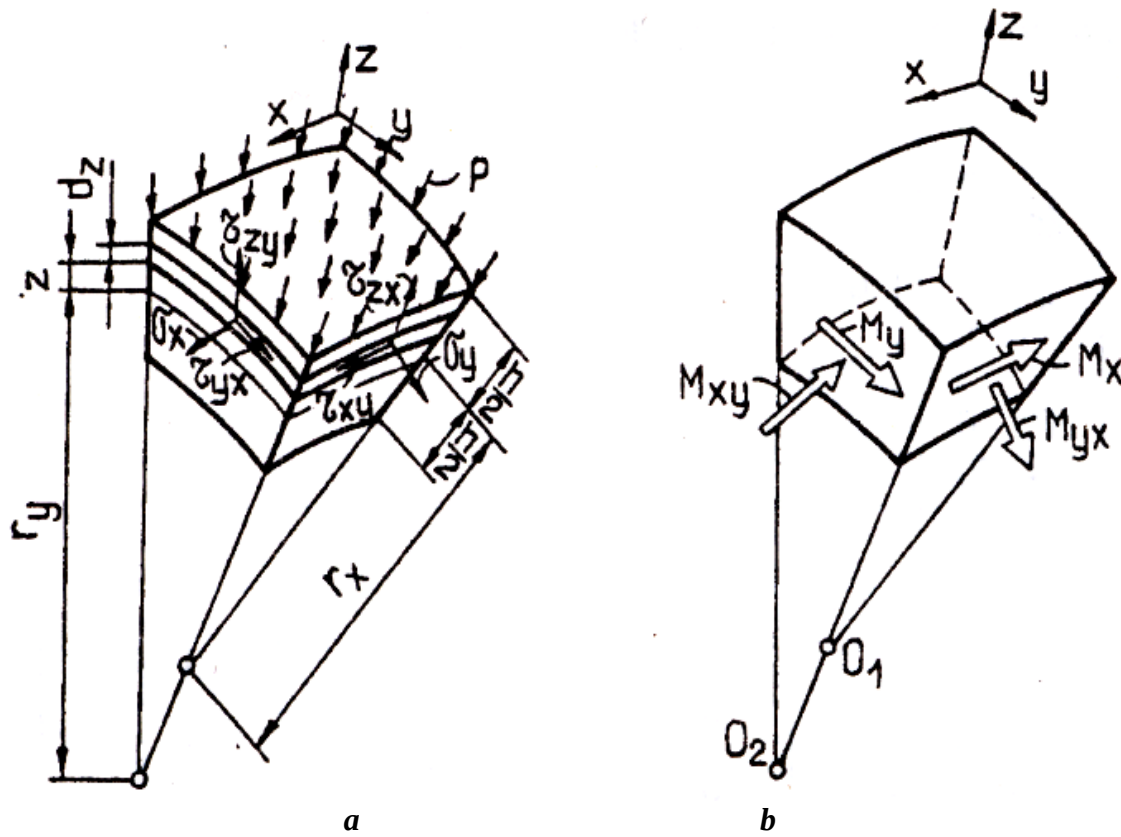


Fig. 5

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (28)$$

$$M_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

cu M_x, M_y, M_{xy} reprezentând momentele de încovoiere (fig.5,b), respectiv, de răsucire și

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (29)$$

Ecuatiile (28), ținând cont de dependențele dintre tensiuni și eforturi, devin:

$$\sigma_x = -\frac{z E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -\frac{z E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (30)$$

$$M_{xy} = -\frac{z E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

Pentru întocmirea modelului matematic cu elemente finite se rețin ecuațiile (28), care se pot sintetiza în următoarea ecuație matriceală,

$$[P] = [E_p] [C], \quad (31)$$

cu:

$$[P] = [M_x M_y M_{xy}]^T, \quad (32)$$

matricea eforturilor (momentelor);

$$[E_p] = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

matricea rigidității la încovoiere a plăcii;

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T, \quad (34)$$

matricea curburilor, notate și cu r_x, r_y, r_{xy} .

În cazul plăcii plane ($r_{xy} \rightarrow \infty$), prin particularizări și transformări ale ecuațiilor de mai sus, se obține ecuația generală în deplasări

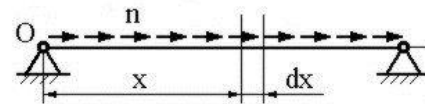
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{2}{D}. \quad (35)$$

MEF-T.2.1.7 STAREA DE TENSIUNI DIN BARELE SOLICITATE AXIAL

Ecuațiile de bază ale teoriei elasticității pentru cazul barei cu secțiunea de arie A , încărcată cu forța axială centrică distribuită $n = n(x)$ (fig. 6), sunt:

- *ecuația de echilibru*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -n - \rho \ddot{u} \quad (36)$$



- *ecuația geometrică*

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (37)$$

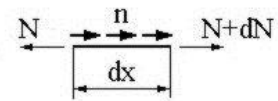


Fig. 6

- *ecuația fizică*

$$N = -E A \varepsilon_x \quad (38)$$

Ecuația generală care descrie deformarea barei, cu luarea în considerare a forțelor de inerție, este

$$\rho \ddot{u} + E A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + n = 0. \quad (39)$$

MEF-T.2.1.8 STAREA DE TENSIUNI DIN BARELE SOLICITATE TRANSVERSAL (LA ÎNCOVOIERE)

Pentru barele solicitate la încovoiere în plan (fig. 7), relațiile de bază ale teoriei elasticității cu luarea în considerare a ipotezei lui Bernoulli, au următoarele forme:

- *ecuația de echilibru,*

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\rho - \rho \ddot{v} \quad (40)$$

- *ecuația geometrică* (a curburii),

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (41)$$

- *ecuația fizică,*

$$M = -E I_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (42)$$

Înlocuind relația (42) în (40), rezultă ecuația generală de deformare a barei,

$$\rho \ddot{v} + \frac{\partial}{\partial x^2} (E I_z) + \rho = 0,$$

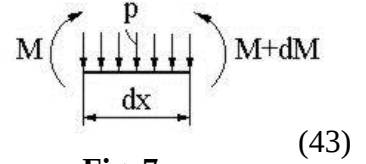
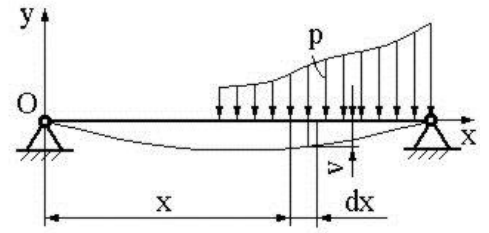


Fig. 7

cu luarea în considerare a forțelor de inerție, în care: I_x este momentul de inerție axial, $\ddot{v}$ - derivata de ordinul doi a deplasării în raport cu timpul (acelerația) și $p = p(x)$ - forța distribuită în planul xOy.

MEF-T.2.1.9 LUCRUL MECANIC ȘI ENERGIA DE DEFORMAȚIE

Pentru analiza structurilor mecanice deformabile, atât cu metodele clasice (metode analitice) cât și cu metodele moderne (metode numerice), folosirea teoremelor energetice reprezintă în multe cazuri o alternativă mult simplificată. În cadrul mecanicii solidului deformabil, trecerea structurii de la o stare de echilibru la alta se numește *deformație*. Prin deformație, punctele de aplicare a forțelor care acționează asupra structurii se deplasează, producând lucrul mecanic. Procesul deformației este guvernat de relația

$$\delta U = \delta L + \delta Q \quad (44)$$

în care U este energia internă totală, δL - lucrul mecanic elementar exterior și δQ - căldura elementară produsă în timpul deformării consecință a frecărilor interne. Pentru structuri cu comportări elastice, cantitatea de căldură disipată este foarte mică, deci neglijabilă ca valoare în relația (2.44). Astfel, se poate considera că tot lucrul mecanic exterior de deformație se transformă în energie internă, numită în acest caz *energia potențială de deformație*. Sistemul în acest caz este conservativ și se caracterizează prin faptul că lucrul mecanic efectuat la trecerea dintr-o stare la alta și revenirea la starea inițială este nul.

Lucrul mecanic exterior

Forțele (sarcinile) exterioare care încarcă structura (v. fig. 1) și generează lucrul mecanic pot fi: forțe distribuite pe suprafața S_p , $[p] = [p_x \ p_y \ p_z]^T$; forțe concentrate $[P] = [P_x \ P_y \ P_z]^T$ și forțele masice $[g] = [g_x \ g_y \ g_z]^T$, distribuite în volumul V . Admițând o variație liniară a sarcinilor (fig. 8,a), cu deplasările punctelor de aplicație ale acestora, $[d] = [u \ v \ w]^T$ expresia lucrului mecanic exterior este

$$L = \int_{S_p} [p]^T [d] dA + \int_V [g]^T [d] dV + [P]^T [d] \quad (45)$$

În cazul general, al dependentei neliniare dintre sarcina exterioară și deplasarea corespunzătoare (fig. 8,b), variația lucrului mecanic exterior este [Băneț, 1981].

$$\Delta L = \delta L + \frac{1}{2} \delta^2 L + \dots \quad (46)$$

Neglijând termenii cu ordinul mai mare decât doi, variația lucrului mecanic exterior, la o variație a deplasării cu $[\delta d]$, este dată de relația

$$\Delta L = \int_{S_p} [p]^T [\delta d] dA + \int_V [g]^T [\delta d] dV + [P]^T [\delta d] \quad (47)$$

Geometric lucrul mecanic exterior este reprezentat prin suprafața cuprinsă între curba de variație a sarcinii or deplasarea (fig. 8, b) și axa asociată deplasării.

Un sistem se numește conservativ dacă lucrul mecanic al forțelor aplicate (exterioare) și al forțelor interioare este independent de stările de deformare intermediare, fiind dependent doar de configurațiile inițială și finală a câmpului deplasărilor.

Energia de deformare

Energia potențială de deformare specifică, în cazul structurilor cu stări de tensiune unidimensionale cu comportare liniară (fig. 9, a), are expresia

$$U_s = \frac{\sigma \varepsilon}{2} \quad (49)$$

și reprezintă energia acumulată de unitatea de volum în urma deformării.

Volumul elementar dV al unei structuri spațiale acumulează energia potențială de deformare, dată de relațiile:

$$dU = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] dV = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma] dV = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [E] [\varepsilon] dV \quad (50)$$

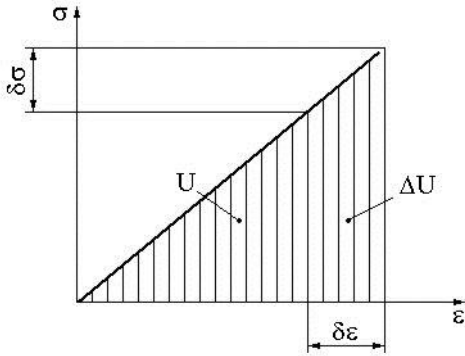


Fig. 8

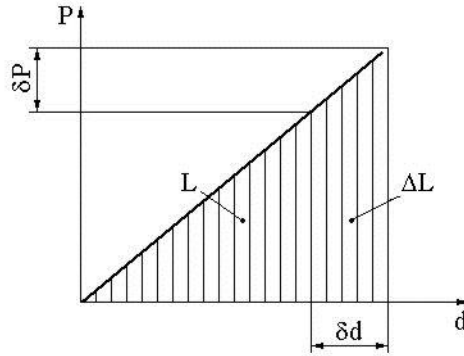


Fig. 9

Energia potențială de deformare pentru întreaga structură, când nu există stări inițiale de tensiune ($[\sigma_0]$) și de deformare ($[\varepsilon_0]$), se calculează cu relația

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} [\varepsilon]^T [E] [\varepsilon] + [\varepsilon]^T [\sigma_0] + [\varepsilon]^T [E] [\varepsilon_0] \right) dV \quad (51)$$

Variația energiei potențiale de deformare, considerând deformarea infinitesimală $[\delta\varepsilon]$, are expresia

$$\Delta U = \int_V [\sigma]^T [\delta\varepsilon] dV \quad (52)$$

Starea de echilibru a unui sistem se poate analiza și prin intermediul energiei potențiale totale care exprimată în formă integrală este numită funcțională.

Principiul lucrului mecanic virtual (deplasărilor virtuale)

Deplasarea virtuală, independentă de forțele aplicate structurii, are o valoare foarte mică (infinitesimală), direcția și sensul arbitrar. Totalitatea deplasărilor virtuale continue, care satisfac condițiile limită geometrice, formează câmpul deplasărilor geometric admisibile. În calcul, parametrii virtuali sunt precedați de simbolul δ , specific calculului variațional.

Pentru un corp deformabil, încărcat exterior și cu anumite condiții de frontieră (limită), lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare, este egal cu lucrul mecanic virtual interior (energia de deformare), pentru orice câmp

de deplasări virtuale, geometric admisibile.

Forma sintetică a acestui principiu

$$\delta L = \delta U \quad (53)$$

după înlocuirea și aplicarea proprietăților calcului variațional, devine

$$\int_{S_0} [p]^T [\delta d] dA + \int_V [g]^T [\delta d] dV + [P]^T [\delta d] = \int_V [\sigma]^T [\delta \epsilon] dV \quad (54)$$

De importanță deosebită în practica inginerescă este reciproca acestui principiu. Condiția de egalitate a lucrurilor mecanice interior și exterior, pentru orice câmp de deplasări virtuale, geometric admisibile, este necesară și suficientă pentru ca structura să fie în echilibru. În consecință, pentru un câmp de deplasări geometric admisibile finit, care satisface ecuațiile de echilibru, se determină deplasările într-un număr finit de puncte rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru în acele puncte.

MEF-T.2.1.10 TEOREMA EXTREMULUI ENERGIEI POTENȚIALE

Potențialul total (energia potențială totală) Π al unui sistem elastic conservativ deformabil se obține însumând energia potențială de deformare U și energia potențială a forțelor exterioare V . Între lucrul mecanic L al forțelor exterioare și potențialul V al acestor forțe există dependența $V = -L$. Astfel, expresia potențialului total (funcționala) Π este

$$\Pi = U - L \quad (55)$$

Ținându-se cont de expresiile energiei de deformare și a lucrului mecanic exterior această relație devine

$$\Pi = \int_V \left(\frac{1}{2} [\epsilon]^T [E] [\epsilon] + [\epsilon]^T [\sigma_0] - [\epsilon]^T [E] [\epsilon_0] \right) dV - \int_{S_p} [p]^T [d] dA - \int_V [g]^T [d] dV - [P]^T [d] \quad (56)$$

Teorema directă a extremului energiei potențiale are următorul enunț:

Dintre toate câmpurile deplasărilor geometric admisibile ale unei structuri stabile, care respectă condițiile limită, acelea care satisfac ecuațiile de echilibru fac ca energia *potențială totală să fie minimă*. Cel mai frecvent, în practică, este folosită reciproca acestei teoreme:

Dintre toate deplasările care respectă condițiile limită, acelea care fac energia *potențială minimă satisfac ecuațiile de echilibru*. Deci, pentru starea de echilibru energia potențială trebuie să fie nulă, adică

$$\delta \Pi = 0 \quad (57)$$

sau ținând cont de (53),

$$\delta U - \delta L = 0 \quad (58)$$

Relațiile (57) și (58), reprezintă expresiile matematice ale teoremei extremului energiei potențiale.

În plus, pentru îndeplinirea condiției de echilibru stabil a structurii - minim pentru energia potențială - este necesară și condiția

$$\delta^2 \Pi > 0. \quad (2.59)$$

MEF-T.2.1.11 TEOREMA LUI HAMILTON

Analiza dinamică a structurilor mecanice, spre deosebire de solicitările statice, consideră parametrii fizici (deplasări, viteze, deformații, tensiuni, sarcini interioare și/sau exterioare) dependenți de timp. Pentru fundamentarea matematică a tehnicilor de calcul de analiză dinamică cu elemente finite se pot folosi și procedeele variaționale care au la bază teorema lui Hamilton, cu următorul enunț: *dintre toate mișcărilor posibile*

ale punctelor structurii, care respectă condițiile limită și inițiale, acelea care în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, fac ca valoarea funcționalei

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (E_c - \Pi) dt \quad (60)$$

să fie minimă, satisfac condițiile de echilibru.

În relația (60), E_c este energia cinetică totală cu expresia,

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho [\dot{d}]^T [\dot{d}] dV, \quad (61)$$

în care $[d]$ este matricea vitezelor (derivata în raport cu timpul a matricei deplasărilor) și ρ - densitatea materialului.

Folosind calculul variațional, teorema lui Hamilton se scrie sub forma,

$$\delta S = 0. \quad (62)$$