

MEF-AI.2.5

REZOLVAREA MODELULUI NUMERIC CU ELEMENTE FINITE

CUPRINS
MEF-AI.2.5.1 INTRODUCERE
MEF-AI.2.5.2 METODA GAUSS
MEF-AI.2.5.3 METODA FRONTALĂ

MEF-AI.2.5.1 INTRODUCERE

Modelul numeric general, în urma operației de asamblare și de introducere a condițiilor limită, este sistemul de ecuații algebrice liniare

$$[K][D]=[Q], \quad (1)$$

cu matricele de rigiditate $[K]$ și a termenilor liberi $[Q]$, cunoscute.

Matricea de rigiditate este o matrice rarefiată (slab populată), cu elementele grupate spre diagonala principală sub forma de bandă în majoritatea aplicațiilor practice, în plus, matricea de rigiditate este o matrice simetrică, cu elementele diagonalei principale nenule.

Având în vedere ordinul foarte mare – zeci de mii - și proprietățile matricei de rigiditate, pentru mărirea eficienței, s-au dezvoltat algoritmi de rezolvare specifici MEF.

MEF-AI.2.5.2 METODA GAUSS

Principiul acestei metode stă la baza multor programe de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice ale modelelor numerice cu elemente finite. Particularitățile care conferă eficiență metodei Gauss în cadrul MEF pot fi dezvoltate în direcția eliminării manipularilor și calculelor cu elemente cu valori nule și în direcția partiționării matricei de rigiditate (matricea sistemului), pentru a se putea rezolva cu un calculator care are volumul memoriei operative (internă) limitat.

În cazul matricelor de rigiditate simetrice de dimensiuni mici, se poate rezolva sistemul de ecuații folosind numai partea superioară a matricei de rigiditate (inclusiv diagonala principală). Algoritmul și subprogramul de calcul pentru această situație sunt prezentate în Cap. MEF-AI.1.3.

În vederea micșorării timpului de calcul și utilizării eficiente a spațiului de memorie, pentru matrici de rigiditate de dimensiuni mari, se stochează în memorie și se operează numai cu elemente cuprinse în semibanda superioară, de lățime LBAND. Aportul elementelor nenule din colțul dreapta jos este nesemnificativ în comparație cu numărul de elemente total. Metoda Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice, folosind matricea bandă, are aceleași etape (substituție, retrosubstituție) și relații principale ca metoda standard. Diferențele constau în valorile indicilor care dau poziția elementelor matricei bandă în relațiile de calcul curente.

Algoritmul de selectare a elementelor matricei bandă, în vederea calculului relațiilor de substituție și retrosubstituție, este implementat în subprogramul GAUSS_B din fig. 1, care rezolvă un sistem de ecuații cu matricea bandă încărcată în totalitate în memoria operativă.

Sunt situații când matricea bandă nu poate fi stocată în memoria operativă. Algoritmul metodei Gauss permite lucrul cu blocuri de dimensiune (LBAND x LBAND), necesitând pentru calcul existența similară a două blocuri în memoria operativă. Detalii și programe de calcul legate de această metodă sunt prezentate în lucrările [Gârbea, 1990; Munteanu, 1979; Pascariu, 1985].

```

Procedure GAUSS_B(var nec,lband:integer;K:mat4;Q:vect);
{type mat4=array[1..nec,1..lband] of real;vect=array[1..nec];}
{K este matricea de rigiditate a structurii de ordinul (nec,lband);
 Q - matricea termenilor liberi și a soluțiilor, de ordinul nec}
var i,j,il,jl,j:integer;qu:real;
begin
  {triunghiularizare}
  for i:=1 to nec do
    begin
      for j:=2 to lband do
        begin
          il:=i+j-1;
          j2:=0;
          qu:=K[i,j]/K[i,1];
          for jl:=j to lband do
            begin
              j2:=j2+1;
              K[il,j2]:=K[i1,j2]-qu*K[i,j1];
            end;
          K[i,j]:=qu;
          Q[i1]:=Q[i1]-qu*Q[i];
        end;
      Q[i]:=Q[i]/K[i,1];
    end;
  {retrosubstituția}
  for i:=n-1 downto 1 do
    for j:=2 to lband do
      begin
        il:=i+j-1;
        Q[i]:=Q[i]-K[i,j]*Q[i1];
      end;
    end;
end;

```

Fig. 1

MEF-AI.2.5.3 METODA FRONTALĂ

Metoda frontală este o tehnică specifică MEF, utilizată pentru asamblarea matricelor de rigiditate și rezolvarea sistemelor simetrice de ecuații algebrice liniare. În cadrul acestei metode, asamblarea ecuațiilor și eliminarea variabilelor prin substituție se realizează simultan, spre deosebire de situațiile prezentate anterior, când aceste operații se făceau succesiv (asamblarea completă urmată de rezolvare).

Procesul tehnicii frontale începe cu operația de asamblare a ecuațiilor elementelor finite dintr-o parte a domeniului. În momentul în care formarea coeficientului unei necunoscute este completă, prin însumarea contribuțiilor elementelor finite adiacente nodului, se întrerupe asamblarea, se elimină necunoscuta respectivă și se stochează ecuația rezultată în memoria auxiliară, eliberându-se astfel locul din memoria operativă. Procesul continuă până când coeficientul altei necunoscute este complet, se elimină necunoscuta, se stochează ecuația în memoria auxiliară și așa mai departe până la epuizarea eliminării tuturor necunoscutelor.

Gradele de libertate și nodurile incluse într-o etapă de asamblare formează așa numitul front al operației. Numărul necunoscutelor participante la o etapă constituie lățimea frontului, care este variabilă în timpul procesului de asamblare.

Ordinea de numerotare a nodurilor nu are importanță, în sensurile economiei de memorie și măririi eficienței calcului, ca în cazul metodei Gauss. De fapt, în cadrul metodei frontale eliminarea necunoscutelor se face într-o ordine care depinde de succesiunea elementelor finite.

Avantajele considerabile ale metodei frontale (eficiență în folosirea memoriei și eficiență a calculelor) sunt atenuate de programabilitatea greoaie a algoritmului metodei.