

MEF-AI.2.4

IMPLEMENTAREA CONDIȚIILOR LIMITĂ

CUPRINS
MEF-AI.2.4.1 INTRODUCERE
MEF-AI.2.4.2 METODE DE IMPLEMENTARE

MEF-AI.2.4.1 INTRODUCERE

În vederea rezolvabilității modelului numeric obținut, este necesară implementarea condițiilor limită din cadrul modelului analitic, care nu au fost luate în considerare până la această etapă. Astfel, în funcție de natura lor, unele condiții limită se pot implementa încă din faza de obținere a modelului numeric al elementului finit, iar altele după ce s-a obținut modelul numeric global.

Condițiile limită încorporate în modelul numeric global, în urma asamblării modelelor numerice ale elementelor finite, pot apărea direct, în mod explicit, sub formă de valori matriceale sau pot apărea indirect (implicit). Din prima categorie fac parte, în general, condițiile limită care specifică valori ale unor parametrii (forțe, temperaturi, presiuni etc.), care acționează în puncte ale zonelor de frontieră și/sau din interiorul domeniului problemei. Din cea de-a doua categorie fac parte condițiile de tip Neuman, când se cunoaște derivata variabilei de câmp (fluxul), pe o parte din frontiera domeniului.

Condițiile limită neîncorporate în modelul numeric global sunt condiții de tip Dirichlet (valori cunoscute ale variabilelor independente). Implementarea acestora, pentru eficiența calcului și simplitatea programării, este necesar să se realizeze cu cât mai puține modificări în sistemul matriceal final.

Metoda clasică a eliminării liniilor și coloanelor corespunzătoare gradelor de libertate cu parametrii cunoscuți, este nepractică în cazul algoritmilor programabili și în consecință, în continuare, se prezintă trei proceduri de implementare a condițiilor limită, fără modificarea dimensiunilor matricelor modelului numeric global obținut.

MEF-AI.2.4.2 METODE DE IMPLEMENTARE

Pentru modelul numeric global de forma,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{i1} & k_{22} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{ji} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \cdot \\ \phi_i \\ \cdot \\ \phi_j \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ Q_i \\ \cdot \\ Q_j \\ \cdot \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

se presupune că necunoscuta nodală ϕ_i are valoarea $\overline{\phi_i}$, prescrisă în condițiile limită.

Prima metodă, presupune anularea elementelor liniei i și a coloanei i din matricea de rigiditate, cu excepția celei de pe diagonala principală, căreia i se atribuie valoarea 1. Pentru a nu se modifica modelul numeric, în membrul drept se adaugă coloana i , cu al i -lea element nul, înmulțită cu $-\phi_i$. În plus, în coloana termenului liber se înlocuiește Q_i cu ϕ_i . Cu aceste transformări, sistemul de rezolvat (1) devine

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & k_{1,i-1} & 0 & k_{1,i+1} & \cdot & k_{1j} & \cdot & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdot & k_{i-1,i-1} & 0 & k_{i-1,i+1} & \cdot & k_{ij} & \cdot & k_{in} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ k_{i+1,1} & k_{i+1,2} & \cdot & k_{i+1,i-1} & 0 & k_{i+1,i+1} & \cdot & k_{i+1,j} & \cdot & k_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{j1} & k_{j2} & \cdot & k_{j,i-1} & 0 & k_{j,i+1} & \cdot & k_{jj} & \cdot & k_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & k_{n,i-1} & 0 & k_{n,i+1} & \cdot & k_{nj} & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \cdot \\ \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \cdot \\ \varphi_j \\ \cdot \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ Q_{i-1} \\ \overline{\varphi_i} \\ Q_{i+1} \\ \cdot \\ Q_j \\ \cdot \\ Q_n \end{bmatrix} - \overline{\varphi_i} \begin{bmatrix} k_{1i} \\ \cdot \\ k_{i-1,i} \\ 0 \\ k_{i+1,i} \\ \cdot \\ k_{ji} \\ \cdot \\ k_{ni} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Metoda a doua, presupune înmulțirea cu număr foarte mare, de exemplu 10^{12} , a elementului k_{ii} al diagonalei principale, corespunzător valorii cunoscute a parametrului ϕ_i , iar elementul Q_i din matricea termenilor liberi se înmulțește cu $\overline{\phi_i} \cdot k_{ii} \cdot 10^{12}$. Astfel, sistemul (1) va avea următoarea formă

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & 10^{12} k_{ji} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{ji} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \cdot \\ \varphi_i \\ \cdot \\ \varphi_j \\ \cdot \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ 10^{12} \overline{\varphi_i} k_{ii} \\ \cdot \\ Q_j \\ \cdot \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Din ecuația i a sistemului de mai sus, cu forma

$$k_{j1}\varphi_1 + k_{i2}\varphi_2 + \dots + 10^{12}k_{ii}\varphi_i + \dots + k_{ij}\varphi_j + \dots + k_{in}\varphi_n = 10^{12}\overline{\phi_i}k_{ii}, \quad (4)$$

deoarece $k_{ii} \cdot 10^{12} \gg k_{ij}, j=1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n$, în urma rezolvării sistemului (5), rezultă $\overline{\phi_i} \approx \phi_i$.

Metoda a treia, presupune însumarea unui număr foarte mare, de exemplu 10^{50} , la elementul diagonal k_{ii} , ceea ce se poate interpreta, pentru cazul problemelor de analiză a structurilor elastice, cu adăugarea în direcția deplasării cunoscute i a unui element elastic foarte rigid. Pentru a nu se modifica modelul numeric, se scade din termenul liber din coloana i a matricei de rigiditate, înmulțită cu $\overline{\phi_i}$. Sistemul de ecuații (1), modificat conform algoritmului descris, devine

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ji} + 10^{12} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{ji} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \cdot \\ \varphi_i \\ \cdot \\ \varphi_j \\ \cdot \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ Q_i \\ \cdot \\ Q_j \\ \cdot \\ Q_n \end{bmatrix} - \overline{\varphi_i} \begin{bmatrix} k_{1i} \\ \cdot \\ k_{ii} \\ \cdot \\ k_{ji} \\ \cdot \\ k_{ni} \end{bmatrix} \quad (5)$$

În cazul analizei structurilor elastice deformabile, este posibil să se ia în considerare deplasări cunoscute ale unor noduri, cu direcții diferite de direcțiile sistemului de coordonate global (fig. 1). Pentru considerarea modelului numeric al structurii a unei deplasări φ^r , după axa $O^r x^r$ a sistemului $O^r x^r y^r z^r$, care are direcția

definită de matricea de rotație $[R^r]$ se asociază un element finit care are la bază un element elastic (arc) liniar, cu matricea de rigiditate

$$[\bar{k}^r] = \begin{bmatrix} k^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

în care k^r este rigiditatea arcului.

Matricea de rigiditate a elementului elastic, raportată la sistemul de coordonate global, este

$$[k^r] = [L^r]^T [\bar{k}^r] [L^r], \quad (7)$$

unde matricea $[L^r]$ este matricea de transformare.

Implementarea efectivă a acestei condiții limită (deplasarea nodală cu direcție oarecare) în matricea de rigiditate se efectuează prin includerea matricei de rigiditate (7) în procesul de asamblare.

Elementul elastic introdus acționează cu forța $F^r = -k^r \phi^r$, pe direcția și în sensul deplasării impuse. Întrucât rigiditățile care apar în matricea de rigiditate a structurii sunt mult mai mici decât rigiditatea arcului $k^r > 10^{50}$, deplasarea nodului la care se referă condiția limită va fi aproximativ egală cu deplasarea impusă, pe direcția și în sensul de acțiune al forței F^r . deci, pentru a nu se modifica modelul numeric global, este necesar să se adauge la forțele nodale inițiale și forța F^r . aceasta se realizează prin considerarea la asamblare și a matricei termenilor liberi, corespunzătoare modelului numeric al elementului finit asociat arcului. Matricea termenilor liberi, raportată la sistemul de coordonate global, este

$$[q^r] = [L^r]^T \begin{bmatrix} F^r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

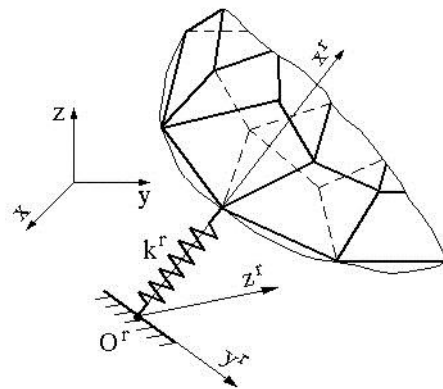


Fig. 1