

MEF-AI.2.2

CALCULUL INTEGRALELOR

CUPRINS

MEF-AI.2.2.1 INTRODUCERE

MEF-AI.2.2.2 CALCULUL ANALITIC

MEF-AI.2.2.3 CALCULUL NUMERIC

MEF-AI.2.2.1 INTRODUCERE

Algoritmul MEF se poate aplica în practică, în vederea realizării diverselor programe, numai dacă se implementează pe calculator numeric. Aceasta presupune adoptarea unor proceduri numerice specifice, executabile într-un timp de calcul cât mai scurt posibil, cu precizie mărită și cu grad de programabilitate mărit. Urmărind realizarea acestor cerințe, în acest capitol se prezintă principalele proceduri numerice pentru calculul integralelor în vederea obținerii modelului numeric global și pentru rezolvarea acestuia.

Coeficienții matriceali ai modelelor numerice se obțin sub formă de integrale. Expresiile de integrat sunt de cele mai multe ori produse matriceale. Integrarea acestor expresii se poate face în două variante:

- **analitic**, în cazul folosirii elementelor finite simple, de regulă liniare, când înmulțirea matricelor și integrarea se realizează analitic și apoi pe baza rezultatelor obținute se întocmesc programele de calcul;
- **numeric**, în cazul elementelor finite complexe, când înmulțirea și integrarea se realizează conform programelor de calcul întocmite preliminar.

MEF-AI.2.2.2 CALCULUL ANALITIC

Un caz special din punctul de vedere al evaluării analitice a integralelor îl constituie utilizarea elementelor finite raportate la sisteme de coordonate locale L-naturale de lungime, arie și volum.

Integrarea expresiilor rezultate la modelarea numerică, când funcțiile de formă sunt exprimate în coordonate L-naturale, se poate face cu următoarele formule:

$$\int_{l^e} L_1^\alpha L_2^\beta dl = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha + \beta + 1)!} l^e, \quad (1)$$

pentru elemente finite unidimensionale, cu coordonatele locale $L_{1,2}$;

$$\int_{A^e} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A^e \quad (2)$$

pentru elemente finite bidimensionale, cu coordonatele locale $L_{1,2,3}$;

$$\int_{V^e} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma L_4^\delta dV = \frac{\alpha! \beta! \gamma! \delta!}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!} 6V^e \quad (3)$$

pentru elementele finite tridimensionale cu coordonatele locale $L_{1,2,3,4}$.

În formulele de mai sus l^e , A^e , V^e sunt lungimea, aria, respectiv volumul domeniilor elementelor finite unidimensionale, bidimensionale, respectiv tridimensionale; α , β , γ , δ – numere întregi, reprezentând puterile coordonatelor locale, în expresiile de integrat.

MEF-AI.2.2.3 CALCULUL NUMERIC

În cazul elementelor finite mai complexe (neliniare), evaluarea analitică a integralelor este costisitoare și uneori chiar imposibilă, motiv pentru care se impune folosirea metodelor de integrare numerică. Dintre acestea, cea mai frecvent folosită este metoda Gauss-Legendre.

Valorile seturilor coeficienților de pondere (w_i, w_j, w_k) și a parametrilor punctelor naturale, sunt prezentate în tab. 1. Precizia integrării, dată de eroarea de integrare, $|R_n|$, se poate aprecia ca fiind proporțională cu dimensiunea h a elementului finit de referință, conform relației

$$|R_n| = \left| \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \right| \leq kh^{2n}. \quad (4)$$

Tab. 1

Nr. pct. Gauss	w_i, w_j, w_k	ξ_i, η_i, ζ_i	Schema punctelor Gauss ($\square$)	Tipul elem. finit	
1	$w_1 = 2$	$\xi_1 = 0$		liniar	unidimensional
2	$w_1 = w_2 = 1$	$\xi_1 = -a$ $\xi_2 = a$		pătratic	
3	$w_1 = w_3 = m$ $w_2 = n$	$\xi_1 = -\xi_3 = a$ $\xi_2 = 0$		cubic	
4	$w_1 = w_2 = 1$	$\xi_1 = -a, \eta_1 = -a$ $\xi_2 = a, \eta_1 = -a$ $\xi_2 = a, \eta_1 = a$ $\xi_1 = -a, \eta_1 = a$		liniar	bidimensional
9	$w_1 = m, w_1 = m$ $w_2 = n, w_1 = m$ $w_3 = m, w_1 = n$ $w_1 = m, w_2 = n$ $w_2 = m, w_2 = m$ $w_3 = n, w_2 = m$ $w_1 = m, w_3 = m$ $w_2 = m, w_3 = n$ $w_3 = n, w_3 = n$	$\xi_1 = -b, \eta_1 = -b$ $\xi_2 = 0, \eta_1 = -b$ $\xi_3 = b, \eta_1 = -b$ $\xi_1 = b, \eta_2 = 0$ $\xi_2 = b, \eta_2 = b$ $\xi_3 = 0, \eta_2 = b$ $\xi_1 = -b, \eta_3 = b$ $\xi_2 = -b, \eta_3 = 0$ $\xi_3 = 0, \eta_3 = 0$		pătratic	
8	$w_1 = w_2 = w_3 = 1$	$\xi_1 = -a, \eta_1 = -a, \zeta_1 = -a$ $\xi_2 = a, \eta_1 = -a, \zeta_1 = -a$ $\xi_2 = a, \eta_2 = a, \zeta_1 = -a$ $\xi_1 = -a, \eta_2 = a, \zeta_1 = -a$ $\xi_1 = a, \eta_1 = -a, \zeta_2 = a$ $\xi_2 = a, \eta_1 = -a, \zeta_2 = a$ $\xi_2 = a, \eta_1 = -a, \zeta_2 = a$ $\xi_1 = -a, \eta_2 = a, \zeta_2 = a$		liniar	tridimensional
$m = 0,55555; \quad n = 0,88888; \quad a = 0,57735; \quad b = 0,774596.$					

Pentru elemente finite raportate la sisteme de coordonate L-naturale formulele de cuadratură Gauss-Legendre au următoarele forme:

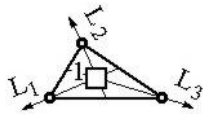
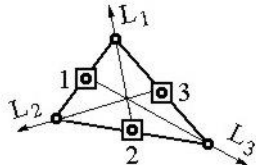
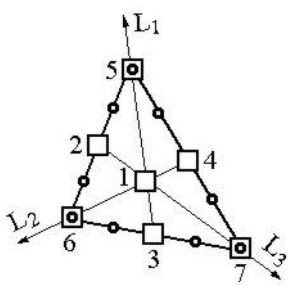
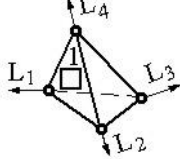
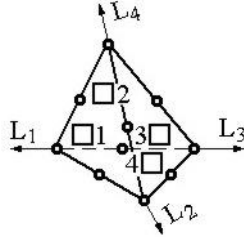
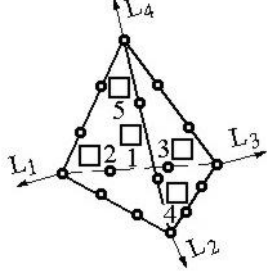
$$\int_{l^e} F(L_1, L_2) dl = \sum_{i=1}^n w_i F(L_{1i}, L_{2i}),$$

$$\int_{A^e} F(L_1, L_2, L_3) dA = \sum_{i=1}^n w_i F(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}), \quad (5)$$

$$\int_{V^e} F(L_1, L_2, L_3, L_4) dV = \sum_{i=1}^n w_i F(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}, L_{4i}).$$

În tab. 2 se prezintă pentru elemente finite raportate la sisteme de coordonate L-naturale, ponderile w_i și coordonatele L_{1i}, L_{2i}, L_{3i} ale punctelor Gauss.

Tab. 2

Nr. pct. Gauss	w_i	L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}	Schema punctelor Gauss ($\square$)	Tipul elem. finite		
1	$w_1 = 1$	$L_{11}= L_{21}= L_{31}=1/3$		liniar	bidimensional	
3	$w_1 = 1/3$	$L_{11}= L_{21}=1/2, L_{31}=0$		pătratic		
	$w_2 = 1/3$	$L_{12}=0, L_{22}= L_{32}=1/2$				
	$w_3 = 1/3$	$L_{13}= L_{33}=1/2, L_{23}=0$				
7	$w_1 = 27/60$	$L_{11}= L_{21}= L_{31}=1/3$		cubic		
	$w_2 = 8/60$	$L_{12}= L_{22}=1/2, L_{32}=0$				
	$w_3 = 8/60$	$L_{13}=0, L_{23}= L_{33}=1/2$				
	$w_4 = 8/60$	$L_{14}= L_{34}=1/2, L_{24}=0$				
	$w_5 = 3/60$	$L_{15}=1, L_{25}= L_{35}=0$				
	$w_6 = 3/60$	$L_{16}= L_{36}=0, L_{26}=1$				
	$w_7 = 3/60$	$L_{17}= L_{27}=0, L_{37}=1$				
1	$w_1 = 1$	$L_{11}= L_{21}= L_{31}=L_{41}=1/3$		liniar	tridimensional	
4	$w_1 = 1/4$	$L_{11}=0,585, L_{21}= L_{31}=L_{41}=0,138$		pătratic		
	$w_2 = 1/4$	$L_{22}=0,585, L_{12}= L_{32}=L_{42}=0,138$				
	$w_3 = 1/4$	$L_{33}=0,585, L_{13}= L_{23}=L_{43}=0,138$				
	$w_4 = 1/4$	$L_{44}=0,585, L_{14}= L_{24}=L_{34}=0,138$				
5	$w_1 = -4/5$	$L_{11}= L_{21}= L_{31}=L_{41}=1/4$		cubic		
	$w_2 = 9/20$	$L_{12}=1/3, L_{22}= L_{32}=L_{42}=1/6$				
	$w_3 = 9/20$	$L_{23}=1/3, L_{13}= L_{33}=L_{43}=1/6$				
	$w_4 = 9/20$	$L_{34}=1/3, L_{14}= L_{24}=L_{44}=1/6$				
	$w_5 = 9/20$	$L_{45}=1/3, L_{15}= L_{25}=L_{35}=1/6$				

Alegerea numărului punctelor Gauss pentru integrare constituie un lucru foarte important, deoarece de această alegere depinde gradul de aproximare al evaluării numerice și timpul de calcul. Există un număr optim de puncte Gauss, pentru care se realizează o precizie acceptabilă, într-un timp de calcul minim [Olaru, 1986].