

MEF-AI.2.1

TRANSFORMĂRI LA SCHIMBAREA SISTEMULUI DE COORDONATE

CUPRINS

MEF-AI.2.1.1 INTRODUCERE

MEF-AI.2.1.2 MATRICEA DE TRANSFORMARE LOCAL –GLOBAL PENTRU STRUCTURI CU BARE

MEF-AI.2.1.1 INTRODUCERE

Rezolvarea cu MEF a unor probleme, în majoritatea cazurilor presupune folosirea a două sisteme de coordonate: local și global. Parametrii care descriu comportarea elementului finit (matricea de rigiditate și matricea termenilor liberi), de obicei, sunt definiți în raport cu sistemul de coordonate local. Asamblarea parametrilor corespunzători elementelor finite necesită un proces de transformare a acestora, care să-i redefinească în raport cu sistemul de coordonate global. Astfel de transformări ale parametrilor caracteristici în funcție de tipul, poziția și orientarea sistemului de coordonate local, se realizează prin intermediul unor matrice de transformare. Identificarea acestor matrice se face diferențiat, în funcție de tipul sistemului de coordonate local folosit.

MEF-AI.2.1.2 MATRICEA DE TRANSFORMARE LOCAL –GLOBAL PENTRU STRUCTURI CU BARE

În continuare, se va urmări obținerea matricelor de transformare pentru cazul sistemului de coordonate local, triortogonal drept, folosit în cadrul modelelor de analiză a structurilor mecanice cu bare.

În fig. 1,a se prezintă, ca exemplu, o structură spațială de bare, cu caracteristicile de material – modulul de elasticitate, E și coeficientul Poisson, ν – și sectionale – aria A și momentele de inerție I_z , I_y și I_p – constante. Elementului finit oarecare e , de lungime l^e , i se asociază sistemul de coordonate local $ix^ey^ez^e$. Modelul numeric al elementului finit are la bază ecuația matriceală $[\bar{k}^e][\bar{d}^e] = [\bar{q}^e]$, în care [Munteanu, 1979]:

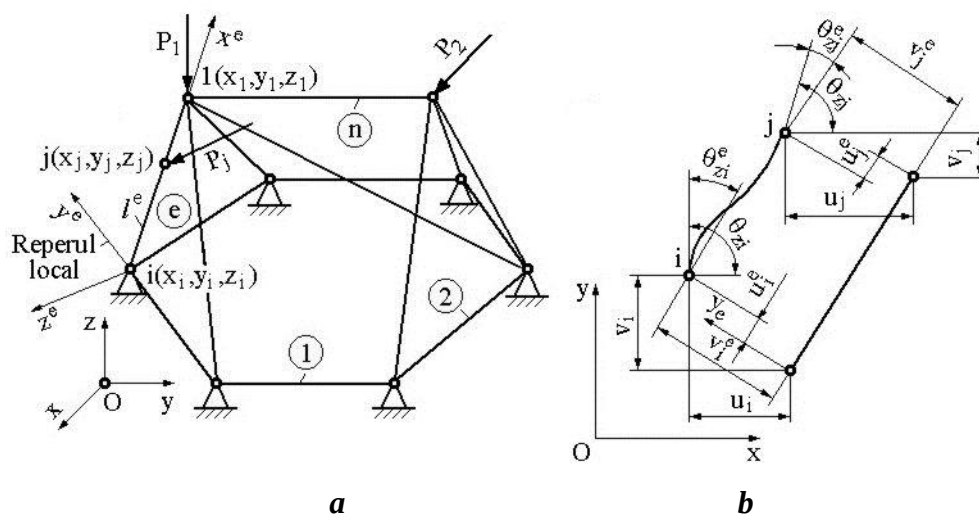


Fig. 1

$$[\bar{k}^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (1)$$

este matricea de rigiditate;

$$[\bar{d}^e] = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}]^T \quad (2)$$

cu $u_i, u_j, v_i, v_j, w_i, w_j$ – deplasările nodale, $\theta_{xi}, \theta_{xj}, \theta_{yi}, \theta_{yj}, \theta_{zi}, \theta_{zj}$ – rotirile nodale (fig. 1,b);

$$[\bar{q}^e] = [N_i \quad T_{yi} \quad T_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad N_j \quad T_{yj} \quad T_{zj} \quad M_{xj} \quad M_{yj} \quad M_{zj}]^T \quad (3)$$

matricea termenilor liberi, cu N_i, N_j – eforturile axiale, $T_{yi}, T_{yj}, T_{zi}, T_{zj}$ – eforturile tăietoare, M_{xi}, M_{xj} – momentele (eforturile) de torsiune, $M_{yi}, M_{yj}, M_{zi}, M_{zj}$ – momentele (eforturile) de încovoiere. Atât componentele deplasărilor nodale, cât și forțele nodale sunt raportate la sistemul de coordonate local al elementului finit.

Pentru determinarea matricelor de transformare a parametrilor modelului numeric, se pornește de la relația de legătură dintre matricea coordonatelor unui punct $[p] = [x \quad y \quad z]^T$, față de sistemul de coordonate global și matricea $[p^e] = [x^e \quad y^e \quad z^e]^T$ a coordonatelor aceluiași punct, față de sistemul de coordonate local

$$\begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Sau

$$[p^e] = [R^e][p]. \quad (5)$$

Matricea $[R^e]$ are ca elemente cosinușii directori ai axelor sistemului de coordonate global (fig. 2), adică:

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \cos \alpha_{11}^e, & l_{12} &= \cos \alpha_{12}^e, & l_{13} &= \cos \alpha_{13}^e, \\
l_{21} &= \cos \alpha_{21}^e, & l_{22} &= \cos \alpha_{22}^e, & l_{23} &= \cos \alpha_{23}^e, \\
l_{31} &= \cos \alpha_{31}^e, & l_{32} &= \cos \alpha_{32}^e, & l_{33} &= \cos \alpha_{33}^e.
\end{aligned} \tag{6}$$

Deoarece cele două repere sunt ortogonale (v. cap. MEF-AI.1.1),

$$[R^e]^T = [R^e]^{-1}, \tag{7}$$

Rezultă,

$$[R^e]^T [R^e] = [I]. \tag{8}$$

Dependențele dintre matricele deplasărilor și eforturilor raportate la cele două sisteme de coordonate au forma,

$$\begin{aligned}
[\bar{d}^e] &= [L^e] [d^e], \\
[\bar{q}^e] &= [L^e] [q^e]
\end{aligned} \tag{9}$$

unde $[\bar{d}^e]$, $[\bar{q}^e]$ sunt matricele deplasărilor și eforturilor, raportate la sistemul de coordonate global și

$$[L^e] = \begin{bmatrix} [R^e] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [R^e] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [R^e] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [R^e] \end{bmatrix} \tag{10}$$

cu $[0]$ matricea nulă de ordinul trei.

Expresia modelului numeric al elementului finit, raportat la sistemul de coordonate local, după înlocuirea relațiilor (9), devine

$$[\bar{k}^e] [L^e] [d^e] = [L^e] [q^e]. \tag{11}$$

Această relație, prin înmulțirea la stânga cu $[L^e]^{-1}$ și ținând cont de relațiile (7) și (8), se scrie sub forma

$$[L^e]^T [\bar{k}^e] [L^e] [d^e] = [q^e]. \tag{12}$$

Din această relație rezultă matricea de rigiditate a elementului finit, raportată la sistemul de coordonate global,

$$[k^e] = [L^e]^T [\bar{k}^e] [L^e]. \tag{13}$$

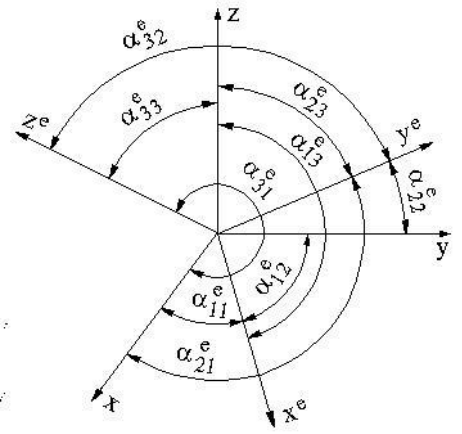


Fig. 2