

# MEF-AI.1.7

## REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE

### CUPRINS

#### MEF-AI.1.7.1 INTRODUCERE

#### MEF-AI.1.7.2 REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

#### MEF-AI.1.7.3 METODE NUMERICE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE

#### MEF-AI.1.7.1 INTRODUCERE

Fundamentarea teoretică riguroasă din punct de vedere matematic, a Metodei Elementelor Finite (MEF), presupune cunoștințe avansate de modelare matematică analitică și numerică, în corelație. Deoarece această lucrare nu se adresează celor implicați în cercetarea teoretică fundamentală a MEF, în acest capitol se prezintă elemente de rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale necesare înțelegerii, implementării și aplicării acestei metode de către utilizatori și programatori.

Ecuția diferențială este ecuația funcțională de forma,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

în care intervine funcția necunoscută  $y(x)$  și anumite derivate ale acesteia. Ordinul  $n$  al unei ecuații diferențiale este prin definiție dat de ordinul cel mare al derivatei ce se întâlnește în expresia ecuației. Când funcția necunoscută este cu o singură variabilă independentă, ecuația se numește *ecuație diferențială ordinară*.

Dacă, în particular, ecuația (1) este explicită sau poate fi explicitată în raport cu  $y^{(n)}$ , sub forma,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

se spune că ecuația este sub formă normală. Când această ecuație se poate scrie sub forma,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (3)$$

în care  $f(x)$ ,  $a_k(x)$ , cu  $k = 1, 2, \dots, n$ , sunt funcții continue, într-un interval de variație al variabilei independente dat, se numește *ecuație diferențială liniară* de ordinul  $n$ .

Multe fenomene și procese în știință și tehnică sunt rezultatul acțiunii mai multor factori și, prin urmare, sunt descrise din punct de vedere matematic de ecuații cu derivate parțiale, care au funcția necunoscută cu mai multe variabile independente. Cele mai des întâlnite și mult studiate sunt fenomenele dependente de doi factori care, satisfac ecuații de forma,

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u + g = 0, \quad (4)$$

unde  $a, b, c, d, e, f, g$  sunt funcții care pot depinde de cele două variabile independente  $x, y$  și de necunoscuta (efectul)  $u$ . Ecuații de acest tip, în forme particulare, descriu principii generale ale fizicii. De exemplu, ecuația lui Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5)$$

se asociază problemelor de stări staționare; ecuația lui Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0, \quad (6)$$

problemelor de echilibru; ecuațiile de forma,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8)$$

problemelor de propagare.

Din punct de vedere matematic, ecuațiile de forma (4), după valorile expresiei,

$$E = b^2 - 4ac, \quad (9)$$

se împart în:

- *ecuații parabolice*,  $E = 0$ ;
- *ecuații hiperbolice*,  $E > 0$ ;
- *ecuații eliptice*,  $E < 0$ .

Pentru cazul ecuațiilor diferențiale din exemplele de mai sus, în urma evaluării expresiei  $E$ , rezultă: ecuațiile (5) și (6) sunt eliptice; ecuația (7) este parabolică; ecuația (8) este hiperbolică.

Ecuația (4) este *liniară* atunci când factorii  $a, b, \dots, g$  sunt funcții numai de variabilele independente  $x$  și  $y$ . Dacă acești factori depind și de  $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial y$ , dar nu și de derivatele de ordin superior, atunci ecuația se numește *cvasiliniară*.

Soluția generală a ecuației diferențiale, prin definiție, este funcția,

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (10)$$

continuă și derivabilă în intervalul de definiție, dependentă de  $n$  constante independente și care verifică ecuația (2). Soluțiile particulare se obțin din soluția generală, prin particularizarea constantelor. Grafic, soluția generală reprezintă o familie de curbe integrale, iar o soluție particulară reprezintă o curbă a familiei.

Ecuațiile liniare au avantajul că soluțiile lor satisfac principiul superpoziției, adică orice combinație liniară a unor soluții particulare este soluție a ecuației diferențiale.

Majoritatea problemelor practice implică determinarea soluțiilor unei ecuații diferențiale, care satisfac și anumite condiții suplimentare. Din acest punct de vedere sunt posibile următoarele tipuri de probleme asociate cu ecuații diferențiale:

- *Problema cu condiții inițiale* sau problema lui Cauchy, care presupune cunoașterea inițială a valorilor necunoscutei și derivatei acesteia:  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  pentru o valoare  $x_0$  a variabilei independente din domeniul de definiție al funcției  $F$ , de asemenea, cunoscută. Cu aceste valori este posibil să se determine constantele din soluție generală a ecuației diferențiale.
- *Problema cu condiții limită*, care presupune cunoașterea unor condiții (relații) legate de valorile necunoscutei și/sau derivatei acesteia, pentru valori ale variabilei independente aparținând frontierei domeniului problemei.
- *Problema mixtă*, care presupune existența atât a condițiilor inițiale cât și a condițiilor limită.

## MEF-AI.1.7.2 REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Orice metodă numerică de rezolvare a ecuațiilor diferențiale pornește cu divizarea domeniului  $[a, b]$  în subdomenii, cu ajutorul punctelor  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  și urmărește determinarea aproximativă a valorilor necunoscutei în aceste puncte.

Frecvent, domeniul  $[a, b]$  se divizează în subdomenii de lungimi egale, notate cu

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (11)$$

și pentru aproximare se folosește formula lui Taylor, sub forma

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''_i + \dots + \frac{h^p}{p!} y_i^{(p)} + R_{p+1}(\xi) \quad (12)$$

sau

$$y_{i-1} = y_i - h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i - \frac{h^3}{6} y'''_i + \dots + \frac{(-1)^p h^p}{p!} y_i^{(p)} + R_{p+1}(\xi), \quad (13)$$

în care:  $y_{i-1} = y(x_i - h)$ ,  $y_i = y(x_i)$ ,  $y_{i+1} = y(x_i + h)$  sunt valorile funcției necunoscute în punctele  $x_{i-1} = x_i - h$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ ;  $y_i^{(k)}$  – derivata de ordinul  $k = 1, 2, \dots, p$ ;  $R_{p+1}(\xi)$  – erorile (reziduurile) cu expresia

$$R_{p+1}(\xi) = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi), \quad (14)$$

cu  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$  pentru formula (12) și, respectiv, cu  $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ , pentru formula (13).

Considerând erorile nule și particularizând relațiile (12) și (13) pentru  $p = 1, 2$ , rezultă:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h y'_i, \\ y_{i-1} &= y_i - h y'_i, \\ y_{i+1} &= y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i, \\ y_{i-1} &= y_i - h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i. \end{aligned} \quad (15)$$

Din aceste relații, efectuând operații simple, rezultă următoarele formule de recurență, care aproximează derivatele de ordinul unu și doi ale funcției  $y(x)$ , necunoscută:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad (16)$$

$$y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad (17)$$

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h}, \quad (18)$$

$$y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}. \quad (19)$$

În fig. 1 se prezintă interpretarea geometrică a formulelor de aproximare a derivatei întâi a funcției  $y(x)$ . Astfel, formulele (16), (17) și (18) aproximează panta tangentei la graficul funcției  $y(x)$  în punctul M cu panta dreptelor MB, AM și, respectiv, AB.

Metodele numerice în care funcția necunoscută într-un punct oarecare  $y_i$  este dedusă printr-o relație de recurență, care conține date legate numai de pasul precedent, se numesc *metode directe* (pas cu pas, unipas), spre deosebire de *metodele indirecte* (multipas), care au relații de recurență dependente de date obținute la mai mulți pași anteriori [Bucur, 1983; Ichim, 1986; Ixaru, 1979; Moszynski, 1973].

Deoarece o ecuație diferențială de ordinul  $n$  de forma (3) se poate echivala cu un sistem de  $n$  ecuații diferențiale de ordinul întâi, în continuare se prezintă rezolvarea numerică prin metode directe a ecuației diferențiale,

$$y' = f(x, y), \quad (20)$$

cu  $x \in [a, b]$  și condiția inițială  $y(x_0) = y(a) = z_0$ .

*Metoda Euler* (a liniilor poligonale) propune aproximarea soluției printr-o linie poligonală în care fiecare segment de dreaptă este coliniar cu direcția câmpului real, dată de panta din extremitatea stângă (v. (1.159) și fig. 1.7). Astfel, ținând cont de aproximarea (17), relația (20) devine următoarea relație de recurență,

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (21)$$

cu  $i = 0, 1, \dots, n-1$  și  $y_0$  dat de condiția inițială. Această metodă se caracterizează prin erori mărite ale rezultatelor și prin simplitatea formulei de recurență, deci prin facilități mărite de programare.

Pentru micșorarea erorilor ( $|R_{p+1}(\xi)|$ ) sunt posibile metode care iau în considerare mai mulți termeni din relația (13) principalul dezavantaj al acestor metode este dat de necesitatea calculului derivatelor funcției  $f$  în diverse puncte, operație greoaie pentru multitudinea cazurilor concrete posibile. Această deficiență este înlăturată în cazul metodelor Runge-Kutta, prezentate mai jos.

*Metodele Runge-Kutta* înlocuiesc calculul derivatelor funcției  $f$  prin evaluări ale acesteia în diverse puncte. Echivalând relația de recurență,

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^p c_j k_j, \quad (22)$$

cu relația (12), după efectuarea calculelor rezultă, factorii  $c_j$ ,  $k_j$  și după înlocuirea acestora rezultă următoarea relație de recurență,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad (23)$$

cu

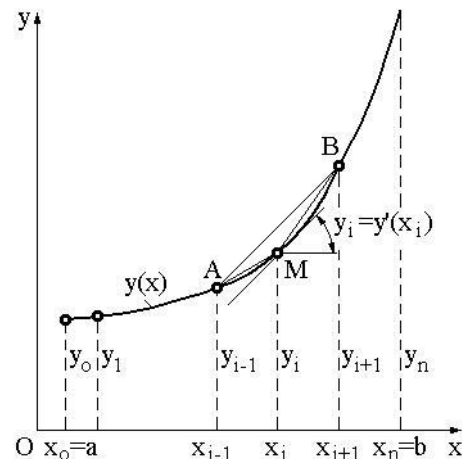
$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2\right); \end{aligned} \quad (24)$$

pentru,  $p = 4$ ,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (25)$$

cu

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned} \quad (26)$$



**Fig. 1**

Subprogramul RUNGE4, de calcul al valorilor necunoscute pentru varianta  $p = 4$ , fără precizarea funcției, este prezentat în fig. 1. Folosirea frecventă în practică a metodei de ordinul patru este justificată de avantajele legate de autopornire (necesită un singur punct pentru start) și de precizie. Deoarece pentru fiecare aproximație se realizează evaluarea funcției  $f$  de mai multe ori, metoda conduce uneori la mărirea timpului de calcul.

```

Procedure RUNGE4(var n:integer;x,y0,a,b:real;y:vect);
{type vect=array[1..n] of real;}
{funcția f se definește separat; de exemplu
function f(x,y:real):real;
begin
  f:=y*sin(x)+x;
end;}
var i,k,l:integer;xi,h,p,k1,k2,k3,k4:real;
begin
  h:=(b-a)/n;
  y[1]:=y0;
  for i:=1 to n-1 do
    begin
      xi:=a+(i-1)*h;
      p:=h/2;
      k1:=f(xi,y[i]);
      k2:=f(xi+p,y[i]+p*k1);
      k3:=f(xi+p,y[i]+p*k2);
      k4:=f(xi+h,y[i]+k3);
      y[i+1]:=y[i]+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    end;
  end;
end;

```

Fig. 2

### MEF-AI.1.7.3 METODE NUMERICE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE

Pentru funcția  $u(x, y)$ , necunoscută a ecuației diferențiale (4) cu domeniul  $D$  divizat în subdomenii dreptunghiulare identice (fig. 3), de dimensiuni,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad k = \frac{d-c}{m}, \quad (27)$$

ținând cont de relațiile (17) și (19), se pot scrie următoarele formule de aproximare a derivatelor parțiale ale acesteia, într-un punct oarecare  $M$  al rețelei astfel generată:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h}, \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j)}{k}, \quad (29)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2}, \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j)} \approx \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2}. \quad (31)$$

Metoda diferențelor finite folosește relațiile de aproximare prezentate mai sus pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale de tipul (4), când se cunosc funcțiile  $a, b, \dots g$ , domeniul de definiție al variabilelor independente și condițiile inițiale problemei membranei elastice de formă dreptunghiulară, încastrată pe conturul  $S$  și încărcată cu presiunea constantă  $p$  (fig. 4), care presupune identificarea stării deformată a membranei în urma încărcării.

Modelul de calcul analitic al problemei are la bază ecuația cu derivate parțiale de tip Poisson,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{p}{\mu}, \quad (32)$$

cu  $u(x, y)$  reprezentând funcția deplasărilor pe direcția de încărcare pentru  $(x, y) \in D$ ;  $\mu$  – constantă de material și condiția limită

$$u(x, y) = 0, \quad (33)$$

pentru  $(x, y) \in S$ .

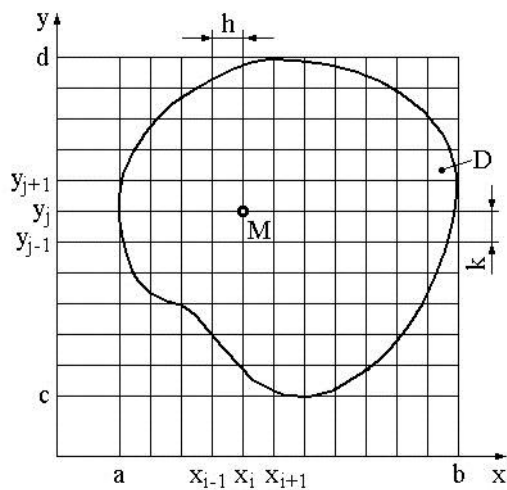


Fig. 3

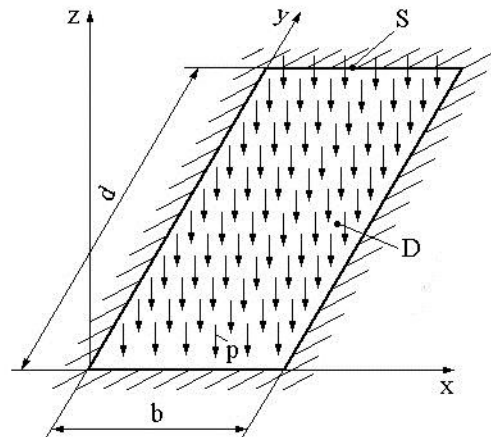


Fig. 4

Ținând cont de derivatele parțiale aproximative (30), (31), în punctul  $M(x_i, y_j)$  (v. fig. 3) relația (32) devine ecuația modelului numeric,

$$2u(x_i, y_j) - \frac{k^2}{h^2 + k^2} u(x_i - h, y_j) + u(x_i + h, y_j) - \frac{h^2}{h^2 + k^2} u(x_i, y_j - k) + u(x_i, y_j + k) = \frac{h^2 k^2}{h^2 + k^2} \frac{p}{\mu} \quad (34)$$

sau ținând cont de relațiile  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $x_{i-1} = x_i - h$ ,  $y_{j+1} = y_j + h$ ,  $y_{j-1} = y_j - h$  și de notația  $u(x_r, y_q) = u_{r,q}$ , aceasta devine,

$$2u_{i,j} - \frac{k^2}{h^2 + k^2} u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - \frac{h^2}{h^2 + k^2} u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = \frac{h^2 k^2}{h^2 + k^2} \frac{p}{\mu}. \quad (35)$$

Domeniul  $D$  al problemei, de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile  $b, d$ , se divizează în subdomenii identice (fig. 5) de dimensiuni  $h = b/n$ ,  $k = d/m$ , cu  $n = 6$  și  $m = 4$ .

Observând că din punct de vedere fizic membrana în stare deformată are un centru de simetrie în punctul  $M(x_4, y_3)$  (fig. 5), deci considerând și funcția necunoscută  $u$  simetrică cu același centru de simetrie, se particularizează relația de recurență (35) numai pentru punctele  $(x_i, y_j)$  din domeniul  $D$ , cu perechile indicilor  $(i, j) \in \{(2,2), (3,2), (4,2), (2,3), (3,3), (4,3)\}$  și rezultă sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{cases} u_{2,2} - c_1(u_{3,2} + u_{1,2}) - c_2(u_{3,2} + u_{2,1}) = d_1 \frac{p}{\mu}, \\ u_{2,3} - c_1(u_{3,3} + u_{1,3}) - c_2(u_{2,2} + u_{2,4}) = d_1 \frac{p}{\mu}, \\ u_{3,2} - c_1(u_{2,2} + u_{4,2}) - c_2(u_{3,3} + u_{3,1}) = d_1 \frac{p}{\mu}, \\ u_{3,3} - c_1(u_{2,3} + u_{4,3}) - c_2(u_{3,2} + u_{3,4}) = d_1 \frac{p}{\mu}, \\ u_{4,2} - c_1(u_{3,2} + u_{5,2}) - c_2(u_{4,3} + u_{4,1}) = d_1 \frac{p}{\mu}, \\ u_{4,3} - c_1(u_{3,3} + u_{5,3}) - c_2(u_{4,2} + u_{4,4}) = d_1 \frac{p}{\mu}, \end{cases} \quad (36)$$

unde,

$$c_1 = \frac{d^2}{16} c, \quad c_2 = \frac{b^2}{36} c, \quad d_1 = \frac{b^2 d^2}{576} c,$$

cu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{d^2}{16}}}.$$

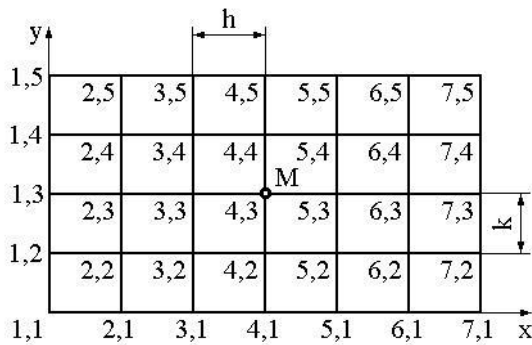


Fig. 5

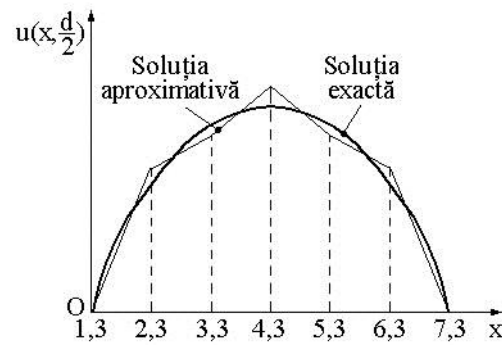


Fig. 6

Ținând cont de proprietatea de simetrie menționată  $u_{5,2} = u_{3,4} = u_{3,2}$ ,  $u_{5,3} = u_{4,4} = u_{3,3}$  și de condițiile limită (33), prin relațiile  $u_{1,2} = u_{1,3} = u_{1,4} = u_{2,1} = u_{3,1} = u_{4,1} = 0$ , sistemul (36) devine un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute, compatibil determinat, cu următoarea formă matriceală,

$$\begin{bmatrix} -2c_2 & 2 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 2 & -c_2 & -c_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & -2c_2 & 2 & 0 & -c_1 \\ 0 & 0 & -2c_1 & 0 & 2 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2c_1 & -2c_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \\ u_{4,2} \\ u_{4,3} \end{bmatrix} = d_1 \frac{p}{\mu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Rezolvând sistemul astfel obținut, se determină valori aproximative ale câmpului deplasării pe direcția de încărcare. În fig. 6 se prezintă grafic variațiile deplasărilor punctelor dintr-o secțiune mediană, obținute cu metode analitice (exacte) și cu metoda diferențelor finite.