

MEF-AI.1.6

CALCULUL VARIATIIONAL

CUPRINS

MEF-AI.1.6.1 INTRODUCERE

MEF-AI.1.6.2 PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM

MEF-AI.1.6.2 FUNCȚIONALE ȘI VALORI STAȚIONARE ALE ACESTORA

MEF-AI.1.6.1 INTRODUCERE

Fundamentarea teoretică riguroasă din punct de vedere matematic, a Metodei Elementelor Finite (MEF), presupune cunoștințe avansate de modelare matematică analitică și numerică, în corelație. Deoarece această lucrare nu se adresează celor implicați în cercetarea teoretică fundamentală a MEF, în acest capitol se prezintă elemente de calcul variațional necesare înțelegerii, implementării și aplicării acestei metode de către utilizatori și programatori.

Calculul variațional are un rol important în studiul sistemelor fizice și tehnice. Acesta se ocupă, în principal, cu determinarea maximelor și minimelor (extremelor) unor expresii conținând funcții necunoscute. Anumite concepte și procedee ale calculului diferențial sunt aplicabile și calculului variațional [Forray, 1975].

MEF-AI.1.6.2 PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM

Condiția necesară pentru existența unui extrem relativ într-un punct $x_0 \in (a, b)$ al funcției $y = f(x)$, cu $f(x)$ continuă, este $f'(x_0) = 0$. Condiția suficientă ca funcția să aibă extrem în x_0 este ca, în plus $f''(x_0) \neq 0$.

Pentru cazul funcțiilor cu mai multe variabile independente, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ținând cont de teorema lui Weierstrass, care arată că orice funcție continuă într-un domeniu închis D are extrem în interiorul sau pe conturul domeniului, $df = 0$ fiind condiția necesară de extrem într-un punct oarecare P din interiorul domeniului, rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

Condițiile de suficientă în acest caz sunt mult mai complicate, De exemplu, funcția cu două variabile, $f(x, y)$, admite maxim sau minim în punctul P dacă, pe lângă condițiile (1) sunt îndeplinite și inegalitățile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad (2)$$

sau respectiv,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0. \quad (3)$$

Multe probleme de maxim și de minim cer să se determine extremul în cazul existenței unor condiții (restricții) suplimentare. Astfel, în cazul general, problema de extrem presupune determinarea maximelor și/sau minimelor funcției cu n variabile, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, supusă condițiilor $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, cu $k < n$. Una din metodele cele mai vechi de rezolvare a acestei probleme este *metoda multiplicatorilor a lui Lagrange*. Algoritmul acestei metode presupune parcurgerea etapelor prezentate în continuare.

- Se formează funcția auxiliară,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4)$$

cu λ_j variabile independente arbitrare.

- Se rezolvă sistemul,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

în raport cu $n+k$ variabile $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

- Se calculează valoarea extremului $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, cu valorile variabilelor independente obținute la etapa precedentă. Pentru înțelegerea algoritmului de mai sus, în continuare, se prezintă o problemă concretă, care necesită determinarea extremului funcției $f(x, y, z) = z$, respectând condițiile $g_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ și $g_2(x, y, z) = 15x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$. Ecuațiile (5), pentru funcția auxiliară,

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = z + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(15x^2 + 4y^2 + z^2 - 16),$$

formează sistemul,

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0, \\ \lambda_1 + 8\lambda_2 y = 0, \\ \lambda_1 + 32\lambda_2 x = 0, \\ x + y + z - 1 = 0, \\ 15x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0. \end{cases}$$

În urma rezolvării acestui sistem rezultă valorile extreme,

$$f(x, y, z) \in \left\{ -\frac{8}{7}, \frac{8}{3} \right\}.$$

MEF-AI.1.6.2 FUNCȚIONALE ȘI VALORI STAȚIONARE ALE ACESTORA

Funcționala se definește ca o funcție dependentă de variația uneia sau mai multor funcții care, la rândul lor, sunt dependente de mai multe variabile. Domeniul unei funcționale este o mulțime de funcții admisibile care aparțin unui spațiu sau unei clase de funcții și nu unui domeniu din spațiul coordonatelor. Din acest motiv și ținând cont de faptul că din punct de vedere geometric funcțiile reale de o variabilă reală reprezintă curbe plane, funcționalele care depind de astfel de curbe sunt numite, conform unei terminologii introduse de L. Euler și funcții linie [Forray, 1975]. Astfel, funcționala se poate considera ca o generalizare naturală a conceptului de funcție. În multe probleme de mecanică și fizică se întâlnesc funcționalele de forma:

$$V(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'') dx, \quad (6)$$

în care F este o funcție explicită de variabila independentă $x \in [x_0, x_1]$, $y = y(x)$ este o funcție reală și y' și y'' sunt derivatele de ordinul întâi, respectiv doi, ale acestei funcții. Obiectivul fundamental al calculului variațional este găsirea acelei valori a funcției $y(x)$ pentru care $V(y)$ este cea mai mică sau cea mai mare dintre toate posibile, când y și y' au valori precizate pentru $x = x_0$ și $x = x_1$. Deci, se poate spune că problemele variaționale constau în găsirea unor funcționale date, având în vedere restricțiile care precizează mulțimea de funcții în care trebuie să se caute soluția problemei propuse.

Orice soluție aproximativă $\bar{y}(x)$ se exprimă în funcție de soluția exactă, cu relația

$$\bar{y}(x) = y(x) + \delta y(x), \quad (7)$$

în care $\delta y(x)$ este variația infinitesimală arbitrară a funcției $y(x)$ (fig. 1), pentru o valoare fixată a variabilei independente x . În calculul variațional, operatorul δ are semnificație similară cu operatorul d folosit în calculul diferențial. Principalele proprietăți ale operațiilor variaționale sunt:

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x},$$

$$\delta(\delta u) = 0,$$

$$\delta \int u dv = \int \delta u dv,$$

$$\delta(u + v) = \delta u + \delta v,$$

$$\delta(uv) = u\delta v + v\delta u = \delta(vu),$$

$$\delta(\lambda u) = \lambda \delta u.$$

Astfel, variația funcționalei (6) se calculează cu relația,

$$\delta V = \int_{x_0}^{x_1} \delta F dx. \quad (1.134)$$

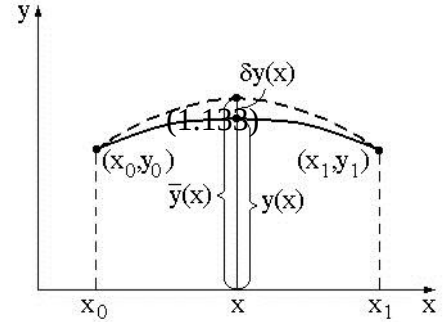


Fig. 1

(1.134)

Funcționala V are o valoare extremă, când se îndeplinește condiția,

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right) dx = 0, \quad (8)$$

numită prima variație a funcționalei. Integrând prin părți termenul al doilea și al treilea al relației (8), rezultă:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx, \quad (9)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx \quad (10)$$

După înlocuirea acestor relații în (8), se obține:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right) \delta y dx + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right) \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_{x_0}^{x_1} = 0. \quad (11)$$

Ținând cont că variația δy este arbitrară nenulă, din această relație se obține:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \quad (14)$$

Relația (12) este ecuația diferențială guvernatoare a problemei, numită și ecuație Euler sau ecuație Euler-Lagrange. Relațiile (13) și (14) sunt condițiile limită naturale pentru $x = x_0$, $x = x_1$. Dacă una din condițiile limită naturale nu este îndeplinită, sunt necesare condițiile:

$$\delta y = \delta y' = 0, \quad (15)$$

pentru $x = x_0$ sau $x = x_1$, numite condiții limită geometrice.

Astfel, se arată că rezolvarea unei ecuații diferențiale într-un anumit domeniu, cu anumite condiții limită, este echivalentă cu minimizarea în acest domeniu a unei funcționale corespunzătoare ecuației diferențiale și condițiilor limită respective.