

MEF-AI.1.3

CALLCULUL VALORILOR ȘI VECTORILOR PROPRII

CUPRINS

MEF-AI.1.3.1 INTRODUCERE

MEF-AI.1.3.2 ECUAȚIA CARACTERISTICĂ

MEF-AI.1.3.3 METODA TRANSFORMĂRII ORTOGONALE (JACOBI)

MEF-AI.1.3.4 METODA LR (RUTISHAUSTER)

MEF-AI.1.3.5 FUNCȚII MATLAB

MEF-AI.1.3.1 INTRODUCERE

Fundamentarea teoretică riguroasă din punct de vedere matematic, a Metodei Elementelor Finite (MEF), presupune cunoștințe avansate de modelare matematică analitică și numerică, în corelație. Deoarece această lucrare nu se adresează celor implicați în cercetarea teoretică fundamentală a MEF, în acest capitol se prezintă elemente de calculul a valorilor și vectorilor proprii necesare înțelegerii, implementării și aplicării acestei metode de către utilizatori și programatori.

În inginerie, se întâlnește frecvent problema determinării valorilor pentru care sistemul de ecuații

$$[A][X] = \lambda[X], \quad (1)$$

cu necunoscută $[X]$, admite o soluție nebanală, cu importanță practică deosebită.

Un vector nenul $[X]$ se numește *vector propriu* al unui operator liniar $[A]$ dacă prin acțiunea acestuia asupra vectorului $[X]$ rezultă un vector colinar cu acesta, conform relației (1) [Beu, 1992]. Scalarul λ se numește *valoare proprie* a operatorului $[A]$, corespunzătoare vectorului propriu $[X]$.

AFF-AI.1.3.2 ECUAȚIA CARACTERISTICĂ

Ecuția (1), rescrisă sub forma

$$[[A] - \lambda[I]][X] = [0], \quad (2)$$

în care $[[A] - \lambda[I]]$ se numește *matrice caracteristică* și reprezintă un sistem omogen de ecuații liniare, care are soluții nenule dacă și numai dacă determinantul matricei sistemului, numit determinant caracteristic, respectă condiția,

$$|[A] - \lambda[I]| = 0. \quad (3)$$

Acest determinant, scris explicit sub forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

este o ecuație algebrică de ordinul n în λ , numită *ecuație caracteristică*, de forma

$$(-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-i} p_i \lambda^{n-i} + \dots + (-1)^n p_n) = 0, \quad (5)$$

în care: p_1 reprezintă suma elementelor diagonale, minorii principali (diagonali) de ordinul unu ai matricei $[A]$; p_2 – suma minorilor principali de ordinul doi; p_i – suma minorilor principali de ordinul i și p_n – determinantul matricei $[A]$.

Partea stângă a ecuației caracteristice (5) este un polinom de ordinul n , numit *polinom caracteristic*. Soluțiile reale și/sau complexe, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, ale ecuației caracteristice, zerouri pentru polinomul caracteristic, constituie valorile proprii ale matricei $[A]$. Corespunzător fiecărei valori proprii λ_i , sistemul (1.71) de ecuații omogene liniare, nu toate independente, are cel puțin o soluție nebanală

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

numită *vector propriu* sau caracteristic. Deoarece sistemul este omogen, acesta are soluția generală de forma $\alpha[X]$, cu valori arbitrare ale scalarului α . Determinarea multiplicatorului α este posibilă impunând vectorului propriu anumite proprietăți numerice, ca de exemplu: suma pătratelor modulelor componentelor este egală cu unitatea; suma modulelor componentelor este egală cu unitatea; componentele sunt ortogonalizate etc. vectorii proprii astfel obținuți se numesc vectorii proprii normalizați.

Notând cu $[X_m]$ matricea având pe coloană vectorii proprii $[X]$, cele n sisteme de ecuații (2), corespunzătoare valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, se scriu sub forma matriceală,

$$[A][X_m] = [X_m][\Lambda], \quad (7)$$

numită *ecuație modală*, în care

$$[X_m] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

este matricea modală și

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_3 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Deoarece matricea modală $[X_m]$, formată din n coloane liniar independente (vectorii proprii sunt liniar independenți) este nesingulară, există $[X_m]^{-1}$ și prin înmulțire la stânga cu această matrice, ecuația modală (7) devine,

$$[X_m]^{-1}[A][X_m] = [\Lambda] \quad (10)$$

Astfel, cunoscând vectorii proprii ai matricei $[A]$, valorile proprii corespunzătoare sunt elementele diagonale ale matricei diagonale $[X_m]^{-1}[A][X_m]$.

Determinarea valorilor proprii se poate face prin *metode directe*, a căror aplicabilitate este limitată în cazul matricei $[A]$ de ordin mare, datorită volumului mare de calcule implicate și erorilor de rotunjire. Există

numeroase metode speciale care determină valorile proprii și vectorii proprii, prin procedee iterative, fără a calcula polinomul caracteristic, și care vor fi parțial prezentate, în continuare.

MEF-AI.1.3.3 METODA TRANSFORMĂRII ORTOGONALE (JACOBI)

Transformarea matricei $[A]$ în matricea diagonală $[\Lambda]$, cu relația (10), se numește *diagonalizare*. Diagonalizarea matricelor simetrice se poate realiza cu ajutorul unei matrice ortogonale $[R]$, cu proprietatea (43 din cap. MEF-AI.1.1). Astfel, în acest caz, relația (10) devine,

$$[R]^T [A] [R] = [\Lambda] \quad (11)$$

Metoda Jacobi pentru diagonalizarea matricei $[A]$ folosește ca matrice $[R]$ matricea rotației plane. Algoritmul de transformare și programul de calcul sunt prezentate detaliat în lucrările [Beu, 1992; Vrapciu, 1982].

MEF-AI.1.3.4 METODA LR (RUTISHAUSTER)

Algoritmul iterativ LR de determinare a valorilor proprii ale matricei $[A]$ are la bază posibilitatea de a reprezenta matricea $[A]$ sub forma unui produs de matrice triunghiulare [Marinescu, 1987; Marinescu, 1987a].

Condiția necesară și suficientă ca o matrice nesingulară $[A]$ să fie descompusă în produsul,

$$[A] = [L][R], \quad (12)$$

în care,

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

sunt matrice triunghiulare inferior (Left) și, respectiv, superior (Right), este ca toți determinanții cu elementele matricei $[A]$, de forma,

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

pentru $k=1, 2, \dots, n$, să fie nenuli.

Din ecuația matriceală (12), rezultă relațiile de calcul al elementelor matricelor $[L]$ și $[R]$:

$$l_{ij} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} r_{ki}, \quad (15)$$

cu $j \geq i$; $l_{j1} = a_{j1}$, pentru $i = 1, 2, \dots, n$ și $j = 1, 2, \dots, n$, și, respectiv,

$$r_{ij} = \frac{1}{l_{ji}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj} \right), \quad (16)$$

cu $r_{ij}=1$; $i=1, 2, \dots, n$; $j=2, 3, \dots, n$; $j > i$.

Dacă descompunerea conform rel. (12) este posibilă, se poate construi următorul șir recursiv de matrice:

$$\begin{aligned}
[B_0] &= [A] = [L_1][R_1], \\
[B_1] &= [R_1][L_1] = [L_2][R_2], \\
[B_2] &= [R_2][L_2] = [L_3][R_3], \\
&\dots \\
[B_{n-1}] &= [R_{n-1}][L_{n-1}] = [L_n][R_n], \\
[B_n] &= [R_n][L_n]
\end{aligned} \tag{17}$$

Din analiza șirului matriceal (17), rezultă relațiile:

$$[B_k][R_k] = [R_k][L_k][R_k] = [R_k][B_{k-1}], \tag{18}$$

din care, se obține,

$$[B_k] = [R_k][B_{k-1}][R_k]^{-1}, \tag{19}$$

pentru $k = 1, 2, \dots, n$. Deci, ținând cont de (10), matricele $[B_n], \dots, [B_k], \dots, [B_0] = [A]$ au aceleași valori proprii.

Rutishauster a demonstrat că pentru $n \rightarrow \infty$, în ultima relație din șirul (17), $[R_n] \rightarrow [I]$ și

$$[B_n] = [L_n] \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{20}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $[A]$. În practică, numărul de iterații este limitat de realizarea condiției abaterii valorilor proprii,

$$\max |\lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)}| < \varepsilon,$$

în care, ε reprezintă eroarea admisibilă prestabilită; $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots$.

Subprogramul VP_LR, prezentat în fig. 1, permite determinarea pentru o matrice simetrică și pozitiv definită de ordinul n , a valorilor proprii, cu precizie impusă, notată cu EPS.

MEF-AI.1.3.5 FUNCȚII MATLAB

Tab. 1

Nr. crt.	Funcția	Semnificație rezultat	Exemplificare	Rezultat		
1	eig	Matricea coloană (vectorul) cu valorile proprii	$l = \text{eig}(A)$	8.5311 -2.0000 0.4689		
2		Matricea vectorilor proprii Matricea modală a valorilor proprii	$[V \ L] = \text{eig}(A)$ Rel. de verificare $A*V = V*L$ sau $A = V*D*V^{-1}$	-0.3744	-0.7071	0.4421
				-0.8483	-0.0000	-0.7805
				-0.3744	0.7071	0.4421
				8.5311	0	0
				0	-2.0000	0
				0	0	0.4689

Dacă matricea are valori proprii de ordinul întâi (valorile proprii λ sunt distincte), atunci vectorii proprii sunt independenți.

```

Procedure VP_LR(var n:integer;a,l,r:mat;vp:vect;eps:real);
{type mat=array[1..n,1..n] of real;}
var i,j,k,kmax,kl,il,i2:integer;b:mat;emax:real;
begin
  kl:=0;
  repeat
    {descompunerea matricei a in matrice triunghiulare}
    for i:=1 to n do
      for j:=1 to n do
        begin
          l[i,j]:=0.0;
          r[i,j]:=0.0;
          if i=j then r[i,i]:=1;
        end;
      for j:=1 to n do l[j,1]:=a[j,1];
      for j:=2 to n do r[1,j]:=a[1,j]/l[1,1];
      for i:=2 to n do
        begin
          il:=i-1;
          for j:=i to n do
            begin
              l[j,i]:=0;
              for k:=1 to il do l[j,i]:=l[j,i]+l[j,k]*r[k,i];
              l[j,i]:=a[j,i]-l[j,i];
            end;
          if i < n then
            begin
              i2:=i2+1;
              for j:=2 to n do
                begin
                  r[i,j]:=0.0;
                  for k:=1 to il do
                    r[i,j]:=r[i,j]+l[i,k]*r[k,j];
                  r[i,j]:=(a[i,j]-r[i,j])/l[i,i];
                end;
              end;
            end;
          {determinarea valorilor proprii}
          for i:=1 to n do
            for j:=1 to n do
              begin
                b[i,j]:=0.0;
                for k:=1 to n do b[i,j]:=b[i,j]+l[i,k]*r[k,j];
              end;
            emax:=0.0;
            kl:=kl+1;
            for i:=1 to n do
              begin
                if abs(a[i,i]-b[i,i]) > emax then
                  emax:=abs(a[i,i]-b[i,i]);
                if emax > eps then
                  begin
                    for k:=1 to n do
                      for j:=1 to n do a[k,j]:=b[j,k];
                    end;
                  end;
              end;
            until (emax < eps) or (kl=kmax);
            for j:=1 to n do vp[j]:=b[j,j];
          end;
        end;
  end;

```

Fig. 1