

MEF-AI.1.1

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL

CUPRINS

MEF-AI.1.1.1 INTRODUCERE

MEF-AI.1.1.2 DEFINIȚII ȘI NOȚIUNI PRIMARE

MEF-AI.1.1.3 OPERAȚII CU ELEMENTELE UNEI MATRICE

MEF-AI.1.1.4 OPERAȚII CU MATRICE

MEF-AI.1.1.4 OPERAȚII ȘI FUNCȚII MATLAB DE LUCRU CU MATRICE

MEF-AI.1.1.1 INTRODUCERE

Fundamentarea teoretică riguroasă din punct de vedere matematic, a Metodei Elementelor Finite (MEF), presupune cunoștințe avansate de modelare matematică analitică și numerică, în corelație. Deoarece această lucrare nu se adresează celor implicați în cercetarea teoretică fundamentală a MEF, în acest capitol se prezintă elemente de calcul matriceal necesare înțelegerii, implementării și aplicării acestei metode de către utilizatori și programatori.

Calculul matriceal constituie un instrument de calcul deosebit de eficient care în varianta asistat de calculator este folosit frecvent în studiul sistemelor și proceselor fizice, în special, a celor studiate de inginerie. De aceea, cunoașterea temeinică a noțiunilor și operațiilor matriceale de către ingineri este calea cea mai eficientă pentru modelări matematice urmate de rezolvări asistate de calculatorul numeric (inclusiv cu MRF). Prezentarea unor proprietăți de bază și a unor operații cu matrice este efectuată, în continuare, în special, pentru fundamentarea calculului analitic și numeric care se vor efectua pe parcursul acestei lucrări.

MEF-AI.1.1.2 DEFINIȚII ȘI NOȚIUNI PRIMARE

Funcția $A: M \times N \rightarrow C$, cu $A(i, j) = a_{ij} \in C$, $i \in M$, $j \in N$ și $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ mulțimea primelor m , respectiv n numere naturale nenule, se numește matrice [Leonte, 1975; Levy, 1976]. Deci, matricea se poate considera un ansamblu de $m \times n$ elemente dispuse pe m linii și n coloane, într-un tablou dreptunghiular, notat

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

sau sintetic,

$$[A] = [a_{ij}]_{m,n}. \quad (2)$$

Indicii asociați fiecărui element al unei matrice, a_{ij} , definesc poziția acestuia. Astfel, indicii $i = 1, 2, \dots, m$ și $j = 1, 2, \dots, n$ indică linia, respectiv coloana în care se află elementul.

Mulțimea elementelor unei matrice poate fi compusă din numere, expresii matematice sau alfanumerice și, chiar, din matrice.

Matricea coloană este matricea care are o singură coloană ($n = 1$) și numărul de linii $m > 1$, notată cu

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

sau sintetic,

$$[B] = [b_{i1}]_{m,1}. \quad (4)$$

Matricea linie este matricea care are o singură linie ($m = 1$) și numărul de coloane $n > 1$, notată

$$[C] = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \quad (5)$$

sau sintetic,

$$[C] = [a_{1j}]_{1,n}. \quad (6)$$

Matricea nulă (zero) este matricea care are toate elementele egale cu zero ($a_{ij} = 0$). Similar se poate defini și **matricea unitate** cu toate elemente egale cu unitatea.

Matricea are numărul liniilor, n , egal cu numărul coloanelor, m ($m = n$), se numește **matrice pătratică** sau matrice de ordinul n .

Matricea diagonală este matricea de ordinul n care are toate elementele de pe diagonala principală diferite de zero ($a_{ij} \neq 0$, pentru $i = j$) și celelalte elemente nule ($a_{ij} = 0$, pentru $i \neq j$). În formă extinsă, matricea diagonală se poate scrie,

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Matricea identitate este matricea diagonală, care are toate elementele diagonalei principale egale cu unitatea. De obicei, această matrice se notează

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

notație care se va păstra și, în continuare.

Matricea triunghiulară este matricea pătratică cu elemente nenule dispuse deasupra (superior triunghiulară) sau sub (inferior triunghiulară) diagonala principală și cu celelalte elemente egale cu zero. În formă extinsă, acestea se pot scrie

$$[A_s] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$[A_i] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Matricea pătratică cu elementele $a_{ij} = a_{ji}$, pentru oricare $i \neq j$, se numește *matrice simetrică*. Dacă $a_{ij} = -a_{ji}$, pentru $i \neq j$, matricea se numește *antisimetrică* (alternantă).

Compararea din punctul de vedere al valorilor și poziției elementelor, a matricelor pătratice, se poate realiza cu ajutorul determinantului, care este suma celor $n!$ produse posibile cu elemente aparținând la linii și coloane distincte. Determinantul matricei pătratice de ordinul n se notează cu una din variantele:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (11)$$

și poate fi un număr, expresie matematică sau alfanumerică.

Matricea pătratică cu determinatul asociat care are valoarea zero se numește *matrice singulară* sau degenerată.

La rezolvarea problemelor cu MEF se întâlnesc frecvent matrice pătratice de dimensiuni mari și cu numărul de elemente nenule mic (rarefiate sau slab populate). De obicei, elementele nenule sunt grupate sub formă de bandă, în jurul diagonalei principale a matricei. Această matrice se numește *matrice bandă* și are forma,

$$[A_b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-3,n-3} & a_{n-3,n-2} & a_{n-3,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-3} & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dimensiunea benzii în care sunt dispuse elementele matriceale, exprimată prin numărul elementelor nenule ale unei linii sau coloane, este l .

MEF-AI.1.1.3 OPERAȚII CU ELEMENTELE UNEI MATRICE

Transpunerea matricelor. Operația de transpunere a matricei $[A]$ (v. (1.1)) presupune determinarea unei matrice transpusă, notată cu $[A]^T$, care are ca linii coloanele matricei inițiale. Astfel, forma transpusei matricei de ordinul (m, n) este matricea de ordinul (n, m) ,

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Prin transpunere, matricele coloană și linie date de relațiile (3) și (5) devin matrice linie,

$$[B]^T = [b_1 \ b_2 \dots b_m], \quad (14)$$

și, respectiv, coloană,

$$[C]^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Subprogramul de TRANSP, care realizează operația de transpunere a unei matrice de ordinul (m, n) este prezentat în fig. 1

```
Procedură TRANSP(var m,n:integer;a:mat1;at:mat2);
{type mat1=array[1..m,1..n] of real;mat2=array[1..n,1..m] of real;}
var i,j:integer;
begin
  for i:=1 to m do
    for j:=1 to n do at[j,i]:=a[i,j];
  end;
```

Fig. 1

Inversarea matricelor. Se consideră că matricea pătratică $[A]$ de ordinul n , *nesingulară*, este inversabilă dacă există matricea inversă, notată cu $[A]^{-1}$, astfel încât,

$$[A] [A]^{-1} = [A]^{-1} [A] = [I] \quad (16)$$

Matricea inversă se poate calcula cu relația,

$$[A]^{-1} = \frac{[A]^*}{|A|}, \quad (17)$$

în care $[A]^*$ este *matricea asociată* (adjunctă sau reciprocă), obținută prin transpunerea matricei complementelor algebrice ale matricei inițiale $[A]$.

Matricea complementelor algebrice este

$$[A]^c = \begin{bmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & \dots & a_{1n}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c & \dots & a_{2n}^c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^c & a_{n2}^c & \dots & a_{nn}^c \end{bmatrix}, \quad (18)$$

cu elementul a_{ij}^c , complementul algebric al elementului a_{ij} al matricei $[A]$, dat de relația

$$a_{ij}^c = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & \cdot & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdot & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdot & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdot & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (19)$$

Matricea asociată se calculează cu relația,

$$[A]^* = [A^c]^T. \quad (20)$$

Această metodă de calcul a matricei inverse, pentru matrice de dimensiuni mari, cu n de ordinul sutelor sau miilor, este greoaie, uneori inaccesibilă, chiar folosind calculatorul electronic. De aceea, în practică, pentru a obține matricea inversă se folosesc alte metode, ușor programabile [Băneț, 1981], dintre care, în continuare, se prezintă metoda transformării matricei [A] în matrice unitate.

Pornind de la matricea extinsă $[[A][I]]$, se fac transformări, astfel încât în locul matricelor [A] și [I] din matricea extinsă să apară matricele unitate [I] și, respectiv, $[A]^{-1}$, după următorul algoritm,

$$\begin{aligned} [[A][I]] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \dots & a_{1n}^{-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \dots & a_{2n}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1}^{-1} & a_{n2}^{-1} & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = [[I][A]^{-1}]. \end{aligned} \quad (21)$$

Calculul de transformare se desfășoară în n pași. În fiecare pas se transformă câte o singură coloană a matricei [A] și, respectiv, a matricei unitate. Elementele transformate ale matricei extinse se obțin cu regula dreptunghiului (eliminarea gaussiană), care are la bază relația,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}, \quad (22)$$

în care $k = 1, 2, \dots, n-1$; $i = k+1, k+2, \dots, n$.

Elementul $a_{kk} \neq 0$, care apare la numitor în relația (22), se numește pivot. Dacă $a_{kk} = 0$, se face schimbarea liniei respective cu o altă linie care are pivotul nenul.

În lucrarea [Marinescu, 1987] se prezintă mai multe metode și programe de calculator de inversare a matricelor pătratice.

Triunghiularizarea matricelor. Operația de triunghiularizare a unei matrice presupune transformarea acesteia, folosind proprietățile operațiilor cu elementele unei matrice, într-o matrice triunghiulară (superior sau inferior), echivalentă.

Dintre multiplele metode de triunghiularizare posibile [Bucur, 1983], în continuare, se prezintă două metode, frecvent aplicabile în cadrul MEF.

Metoda lui Gauss de triunghiularizare implică transformări succesive ale matricei inițiale, după următorul algoritm:

$$\begin{aligned}
[A] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{11}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} = \dots = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k+1} & \dots & a_{nn}^{-1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2,k+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+2,n}^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} = \dots = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{11}^{(1)} & \dots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{24}$$

Transformarea succesivă a elementelor liniilor matricei $[A]$, în cadrul pasului k , se realizează cu relația (22), în care se consideră $k = 1, 2, \dots, n-1$; $j = k+1, k+2, \dots, n$ și $i = k+1, k+2, \dots, n$.

Subprogramul de TRI_G, care realizează triunghularizarea unei matrice pătrate de ordinul n cu elementele diagonalei principale nenule și folosește algoritmul de mai sus, este prezentat în fig. 2

```

Procedure TRI_G(var n:integer;a:mat);
{type mat=array[1..n,1..n] of real;}
var i,j,il,jl,l:integer;
begin
  for i:=1 to n-1 do
    begin
      if a[i,i] <> 0 then
        begin
          l:=i+1;
          for j:=1 to n do a[i,j]:=a[i,j]/a[i,i];
          for il:=l to n do
            for j:=1 to n do
              a[il,j]:=a[il,j]-a[il,i]*a[i,j];
            end
          end
        else
          writeln('Eroare, pivot zero');
        end
      end;
    end;
end;

```

Fig. 2

Metoda de triunghularizare bazată pe *factorizarea Cholesky* se aplică matricelor simetrice și pozitiv definite. O matrice se consideră pozitiv definită când toți determinanții posibili, care au primul element același cu primul element al matricei, sunt pozitivi. În aceste condiții, matricea se poate descompune sub formă de produs a două matrice [Munteanu, 1976],

$$[A] = [S]^T [S], \tag{25}$$

în care, $[S]$ este o matrice superior triunghulară. Explicit, relația (25) are forma

$$\begin{bmatrix} s_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{1n} & s_{2n} & \cdot & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdot & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdot & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Din această ecuație matriceală, rezultă elementele liniilor matricei [S]:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, s_{12} = \frac{a_{12}}{s_{11}}, \dots, s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad (27)$$

cu $j = 2, 3, \dots, n$, pentru prima linie;

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}^2}, \dots, s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}s_{lj}}{s_{ii}}, \quad (28)$$

cu $i = 2, 3, \dots, n-1$; $j = i+1, i+2, \dots, n$, pentru linia i .

Subprogramul de TRI_C, care realizează triunghiularizarea unei matrice simetrice pozitiv definită, folosind acest algoritm, este prezentat în fig. 2

```

Procedure TRI_C(var n:integer;a,s:mat);
{type mat=array[1..n,1..n] of real;}
var i,j,k,j1,j2:integer;sum:real;
begin
  s[1,1]:=sqrt(a[1,1]);
  for i:=2 to n do s[i,1]:=a[i,1]/s[1,1];
  for j:=2 to n do
    begin
      j1:=j-1;
      for i:=1 to j1 do s[i,j]:=0;
      sum:=0;
      for k:=1 to j1 do sum:=sum+s[j,k]*s[j,k];
      s[j,j]:=sqrt(a[j,j]-sum);
      if j < n then
        begin
          j2:=j+1;
          for i:=j2 to n do
            begin
              sum:=0;
              for k:=1 to j1 do sum:=sum+s[i,k]*s[j,k];
              s[i,j]:=(a[i,j]-sum)/s[j,j];
            end;
          end;
        end;
    end;
  end;
end;

```

Fig. 2

Partiționarea matricelor. Definiția matricei nu exclude posibilitatea ca fiecare element sau grup de elemente ale unei matrice să fie, de asemenea, matrice, denumite în mod uzual *submatrice* (blocuri). Astfel, matricea,

$$[S] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1p} & a_{1,p+1} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdot & a_{p2} & a_{p,p+1} & \cdot & a_{pn} \\ a_{p+1,1} & \cdot & a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} & \cdot & a_{p+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{np} & a_{n,p+1} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \quad (29)$$

este divizată, de exemplu, în patru submatrice (blocuri).

Operația de divizare în submatrice a unei matrice se numește partiționare și este utilă în efectuarea operațiilor matriceale, mai ales în cazul matricelor de dimensiuni mari. De exemplu, pentru inversarea matricei $[S]$ partiționată ca în relația (29), cu $|A| \neq 0$ și $|D| \neq 0$, considerând inversa de forma,

$$[S]^{-1} = \begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [M] & [N] \end{bmatrix}, \quad (30)$$

din ecuația matriceală,

$$[S][S]^{-1} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [M] & [N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_1] & [O_1] \\ [O_2] & [I_2] \end{bmatrix}, \quad (31)$$

efectuând operațiile de înmulțire și echivalare, rezultă:

$$\begin{aligned} [N] &= \left[[D] - [C][A]^{-1}[B] \right]^{-1}, \\ [L] &= -[A]^{-1}[B][N], \\ [M] &= -[N][C][A]^{-1}, \\ [K] &= [A]^{-1} - [A]^{-1}[B][M]. \end{aligned} \quad (32)$$

În relația (31), $[I_1]$ și $[I_2]$ sunt matrice unitate de ordinul p , respectiv $n-p$, iar $[O_1]$ și $[O_2]$ sunt matrice nule, de ordinul $n-p$ și, respectiv, p . Se observă, în relațiile (32), că pentru calculul matricei inverse $[S]^{-1}$ este necesar calculul a două matrice inverse, una de ordinul p pentru matricea $[A]$ și cealaltă de ordinul $n-p$ pentru matricea $\left[[D] - [C][A]^{-1}[B] \right]$.

MEF-AI.1.1.4 OPERAȚII CU MATRICE

Adunarea și scăderea matricelor. Operația de adunare (scădere) a două matrice este condiționată de compatibilitatea celor două matrice pentru această operație, adică să fie de același ordin. Deci, suma (diferența) matricelor $[A]$ și $[B]$, de ordinul (m, n) este matricea,

$$[C] = [A] \pm [B], \quad (33)$$

de ordinul (m, n) , cu elementele $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Adunarea matricelor are proprietățile (asociativitate, comutativitate, matrice neutră, matrice opusă) definite de relațiile:

$$\begin{aligned} [A] + ([B] + [C]) &= ([A] + [B]) + [C], \\ [A] + [B] &= [B] + [A], \\ [A] + [0] &= [A], \\ [A] + (-[A]) &= [0]. \end{aligned} \quad (34)$$

Subprogramul de SUM, care realizează adunarea matricelor $[A]$ și $[B]$ de ordinul (m, n) cu obținerea rezultatului în matricea $[A]$, este prezentat în fig. 3.

Înmulțirea unei matrice cu un scalar. Operația de înmulțire a matricei $[A]$ cu scalarul α presupune obținerea matricei,

$$[C] = \alpha [A], \quad (35)$$

```

Procedure SUM(var m,n:integer;a,b:mat1);
{type mat1=array[1..m,1..n] of real;}
var i,j:integer;
begin
  for i:=1 to m do
    for j:=1 to n do a[i,j]:=a[i,j]+b[i,j];
  end;
end;

```

Fig. 3

care are același ordin cu matricea $[A]$ și elementele $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Proprietățile operației de înmulțire a unei matrice cu un scalar sunt:

$$\begin{aligned}
 1[A] &= [A], \\
 0[A] &= [0], \\
 \alpha([B][A]) &= (\alpha[B])[A] = [B](\alpha[A]), \\
 (\alpha + \beta)[A] &= \alpha[A] + \beta[A], \\
 \alpha([A] + [B]) &= \alpha[A] + \alpha[B],
 \end{aligned} \tag{36}$$

în care $[A]$, $[B]$ sunt matrice care au același ordin și α, β scalari oarecare.

În fig. 4, se prezintă programul **MULTIP_S** care realizează înmulțirea unei matrice $[A]$ cu scalarul real α , notat cu alfa.

```

Procedure MULTIP_S(var m,n:integer;a,c:mat1;alfa:real);
{type mat1=array[1..m,1..n] of real;}
var i,j:integer;
begin
  for i:=1 to m do
    for j:=1 to n do c[i,j]:=alfa*a[i,j];
  end;
end;

```

Fig. 4

Înmulțirea matricelor. O matrice $[A]$ de ordinul (m, n) prin înmulțirea cu matricea $[B]$ de ordinul (n, p) , după regula „linie-coloană”, generează matricea,

$$[C] = [A][B], \tag{37}$$

de ordinul (m, p) , cu elementele

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Se observă că pentru operația de înmulțire matricele trebuie să fie compatibile (conforme), adică numărul de linii al unei matrice să fie egal cu numărul de coloane al celeilalte matrice.

Operația de înmulțire a matricelor are următoarele proprietăți principale (asociativitate, matrice neutră, matrice opusă, distributivitate):

$$\begin{aligned}
 [A]([B][C]) &= ([A][B])[C], \\
 [A][1] &= [1][A] = [A], \\
 [A][A]^{-1} &= [1], \\
 ([A] + [B])[C] &= [A][C] + [B][C], \\
 [C]([A] + [B]) &= [C][A] + [C][B].
 \end{aligned} \tag{38}$$

Produsul a două matrice, în general, nu este comutativ $[A] [B] \neq [B] [A]$. Există situații când $[A] \neq [C]$ și este îndeplinită egalitatea $[A] [B] = [C] [B]$.

Subprogramele MULTI_1 și MULTI_2, care realizează înmulțirea a două matrice compatibile pentru operația de înmulțire, sunt prezentate în fig. 5.

```

Procedure MULTI_1(var m,p,n:integer;c:mat1;a:mat2;b:mat3);
{type mat1=array[1..m,1..n] of real;mat2=array[1..m,1..p] of real;
mat3=array[1..p,1..n] of real;}
var i,j,k:integer;
begin
  for i:=1 to m do
    for j:=1 to n do
      begin
        c[i,j]:=0;
        for k:=1 to p do c[i,j]:=c[i,j]+a[i,k]*b[k,j];
      end;
    end;
  end;
Procedure MULTI_2(var m,p,n:integer;c:mat1;a:mat2;b:mat3);
{type mat1=array[1..m,1..n] of real;mat2=array[1..m,1..p] of real;
mat3=array[1..p,1..n] of real;}
var i,j,k:integer;
begin
  for i:=1 to m do
    for j:=1 to n do
      begin
        c[i,j]:=0;
        for k:=1 to p do
          begin
            if (a[i,k] <> 0) and (b[k,j] <> 0) then
              c[i,j]:=c[i,j]+a[i,k]*b[k,j];
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

Fig. 4

Operații cu matrice transpuse și inverse. În continuare, se prezintă sintetic, principalele proprietăți ale operațiilor matriceale cu matrice transpuse și inverse:

$$\begin{aligned}
 [A+B]^T &= [A]^T + [B]^T, \\
 [\alpha A]^T &= \alpha [A]^T, \\
 [A^T]^T &= [A], \\
 [A^{-1}]^T &= [A^T]^{-1}, \\
 [A^{-1}]^{-1} &= [A].
 \end{aligned} \tag{39}$$

Dacă $[D] = [A] [B] [C]$, atunci

$$[D]^T = [C]^T [B]^T [A]^T. \tag{40}$$

Dacă $[D] = [A] [B] [C]$ și $[A]$, $[B]$, $[C]$ sunt nesingulare, atunci

$$[D]^{-1} = [C]^{-1} [B]^{-1} [A]^{-1}. \tag{41}$$

Dacă matricea $[A]$ respectă condiția,

$$[A] [A]^T = [A]^T [A] = [1], \quad (42)$$

rezultă,

$$[A]^T = [A]^{-1}. \quad (43)$$

Matricea care verifică această relație se numește matrice ortogonală.

Aplicând proprietatea (40), suma de produse de tipul,

$$L = F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + \dots + F_n \delta_n, \quad (44)$$

poate fi scrisă sub formele:

$$L = [F]^T [\delta] = [\delta]^T [F], \quad (45)$$

în care, $[F] = [F_1 \ F_2 \dots F_n]^T$ și $[\delta] = [\delta_1 \ \delta_2 \dots \delta_n]^T$.

MEF-AI.1.1.4 OPERAȚII ȘI FUNCȚII MATLAB DE LUCRU CU MATRICE

Pachetul MATLAB (**MA**Trix **LAB**oratory) este limbaj de nivel înalt care integrează calculul, vizualizarea și programarea, cu precădere, bazate pe entități de tip matrice într-un mediu ușor de utilizat cu intrări/ieșiri, instrucțiuni de control, funcții, grafice, structuri de date diverse și cu proprietăți de programare orientată pe obiecte aplicabile în domeniul științei și, în special, ingineriei.

Entitățile de tip matrice (tablouri) pot fi generate cu funcții specifice (built-in sau m-files) sau se introduce ca liste explicite ce conțin elementele acesteia [Ghinea, 2003]. De exemplu, matricea definită prin relația (1), pentru $m = n = 3$ și elemente din primele cinci numere naturale, în mediul MATLAB are forma $A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 4; 3 \ 2 \ 1]$, în care elementele liniilor sunt separate prin spații (sau virgule), liniile se marchează cu punct și virgulă și lista de elemente se delimitează cu paranteze drepte ([]). Pachetul MATLAB are funcții dedicate de generare a matricelor nule (ex. zeros(2,3)), identitate (eye(3,3)), cu toate elementele unitare (ones(3,3)), și cu elemente aleatorii în intervalul [0.0, 1.0] (ex. rand(3,2)).

În tab. 1. se prezintă funcții MATLAB care operează cu elementele unei matrici.

Tab. 1

Nr. crt.	Funcția	Semnificație rezultat	Exemplificare	Rezultat
1	sum/prod	Matricea linie cu elemente sumele/produsele elementelor coloanelor	sum(A)/prod(A)	8 9 8 / 12 20 12
2	max/min	Matricea linie cu elemente maximele/minimele elementelor coloanelor	max(A)/ min(A)	4 5 4 1 2 1
3	diag	Matricea coloană cu elementele diagonale	diag(A)	1 5 1
4	trace	Suma elementelor de pe diagonala principală	trace(A)	7
5	det	Determinantul asociat (numai pentru matricele patratice)	det(A)	-8
6	transpose	Matricea transpusă	transpose(A) sau A'	1 4 3 2 5 2 3 4 1
7	inv	Matricea inversă	inv(A) sau A^-1	0.3750 -0.5000 0.8750 -1.0000 1.0000 -1.0000 0.8750 -0.5000 0.3750

8	size	Matricea linie cu elemente dimensiunile matricei	size(A)	3	3
9	rank	Rangul matricei	rank(A)	3	
10	tril	Matrice inferior triunghiulară	tril(A)	1	0 0 4 5 0 3 2 1
11	tru	Matrice inferior triunghiulară	tru(A)	1	2 3 0 5 4 0 0 1

Operațiile uzuale cu elementele a două sau mai multe matrice se pot face având la bază regulile calculului matriceal (tab. 2) sau regulile calculului scalar operând cu elementele situate în aceeași poziții în matricele operand, considerate ca tablouri cu aceleași dimensiuni (tab. 3).

Tab. 2

Nr. crt.	Simbol	Semnificație rezultat	Exemplificare	Rezultat
1	*	Matrice cu produsul matriceal al elementelor	$A * A$	18 18 14 36 41 36 14 18 18
2	\	Matrice cu câtul matriceal (împărțirea) la stânga al elementelor	$A \setminus A'$ sau $\text{inv}(A) * A'$ sau $(A)^{-1} * A'$	2.0000 2.5000 1.0000 -2.0000 -3.0000 -2.0000 1.0000 2.5000 2.0000
3	/	Matrice cu câtul matriceal (împărțirea) la dreapta al elementelor	A' / A sau $A' * \text{inv}(A)$ sau $A' * A^{-1}$	-1.0000 2.0000 -2.0000 -2.5000 3.0000 -2.5000 -2.0000 2.0000 -1.0000
4	^	Matrice cu produsele matriceale repetate (ridicarea la putere) ale elementelor	A^3	132 154 140 308 349 308 140 154 132

Tab. 3

Nr. crt.	Simbol	Semnificație rezultat	Exemplificare	Rezultat
1	+	Matrice cu suma elementelor	$A + A$	2 4 6 8 10 8 6 4 2
2	-	Matrice cu diferența elementelor	$A - A$	0 0 0 0 0 0 0 0 0
3	.*	Matrice cu produsul scalar al elementelor	$A .* A$	1 4 9 16 25 16 9 4 1
4	.\	Matrice cu câtul scalar (împărțirea) la stânga al elementelor	$A ./ A'$	1.0000 2.0000 1.0000 0.5000 1.0000 0.5000 1.0000 2.0000 1.0000
5	./	Matrice cu câtul scalar (împărțirea) la dreapta al elementelor	$A' ./ A$	1.0000 2.0000 1.0000 0.5000 1.0000 0.5000 1.0000 2.0000 1.0000
6	.^	Matrice cu produsele scalare repetate (ridicarea la putere) ale elementelor	$A.^3$	1 8 27 64 125 64 27 8 1

Pentru dimensiuni mari ale matricelor de rigiditate, care în general conțin multe zerouri (motiv pentru care se numesc și "rare" = "sparse"), tehnicile de operare cu aceste funcții sau dovedit foarte eficiente pentru creșterea vitezei de calcul, prin înlăturarea operațiilor aritmetice cu zero și spațiul necesar, deoarece pentru valorile nule nu se alocă spațiu în memorie.