

AEF-T.4.4

PROBLEME DE DINAMICĂ

CUPRINS

AEF-T.4.4 .1 ASPECTE GENERALE

AEF-T.4.4 .2 TIPURI DE PROBLEME

AEF-T.4.4 .3 MODEL TEORETIC CVAȘIGENERAL DE AEF

AEF-T.4.4 .1 ASPECTE GENERALE

Problemele de dinamică urmăresc să modeleze și să rezolve, cu precădere, următoarele procese fizice:

- **Vibrații**, mișcări cu amplitudini reduse în jurul unor stări de echilibru, de obicei, produse de forțe elastice.
- **Vibrații libere**, mișcări de vibrație, fără a introduce energie din exterior, generate de energia internă care se transformă repetitiv din energie potențială în energie cinetică (în cazul unor materiale cu frecări interne apare energia de disipare și vibrațiile se amortizează).
- **Autovibrațiile**, vibrații care sunt întreținute și de forțe periodice generate și de mișcarea însăși independent de energie primită din exterior continuu.
- **Vibrații forțate (întreținute)**, produse de forțe de excitație (perturbație) externe prin transfer de energie la structură. În cazul în care transferul se face periodic, constant pe fiecare ciclu, vibrația este staționară (armonică) cu amplitudine constantă, iar când transferul se face neuniform, vibrația are caracter tranzitoriu.
- **Vibrații aleatoare** generate de excitații întâmplătoare au caracter nedeterminist (nepredictibil) și sunt frecvent întâlnite în practica reală.
- **Șocuri (impacturi)**, se produc ca urmare a unor sarcini externe aplicate brusc prin transmiterea energiei cinetice într-un timp interval de timp mai mic decât perioada sa proprie de vibrație. Se poate considera ca un caz particular de vibrație forțată; după încetarea acțiunii sarcinii externe răspunsul structurii devine o vibrație liberă.
 - **Rezonanța**, vibrații cu amplitudini mărite în anumite puncte ale structurii generate de suprapunerea frecvenței sarcinii de excitație cu frecvența proprie a structurii. În aceste puncte apar deformări și tensiuni mari ce pot conduce la funcționare necorespunzătoare și/sau rupere la oboseală.

Pentru sistemele cu multe grade de libertate, comportarea dinamică se descrie cu ecuația generală de mișcare,

$$[M] \{\ddot{D}\} + [C] \{\dot{D}\} + [K] \{D\} = \{F\}$$

unde, $\{D\}$ este vectorul deplasărilor nodale, $\{F\}$ – vectorul forțelor externe nodale, $[M]$ – matricea masei, $[C]$ – matricea de amortizare, $[K]$ – matricea de rigiditate. Această ecuație este privită ca o relație de echilibru a forțelor externe (partea din dreapta) care sunt în echilibru cu suma forțelor de inerție ($[M] \{\ddot{D}\}$), de amortizare ($[C] \{\dot{D}\}$) și elastică.

AEF-T.4.4 .2 TIPURI DE PROBLEME

Problemele de dinamica structurilor mecanice pot fi directe și inverse. *Problema directă (de analiză)* presupune determinarea răspunsului structurii cunoscând ecuația de mișcare și vectorul forțelor externe. *Problema inversă*, presupune, pe de-o parte, sinteza (proiectarea) structurii - determinarea configurației structurii cunoscând forța exterioară și răspunsul dorit, sau, pe de altă parte identificarea structurii – determinarea unui model (ecuație de mișcare) a structurii cunoscând o serie de parametri și funcții (de probă) ale forțelor exterioare.

Problemele de analiză dinamică (inclusiv cu elemente finite) pot fi:

- **Analiză modală** presupune, determinarea comportării teoretice a structurii care vibrează cu oscilații care au frecvențe și moduri de oscilație ideale (consecință a ipotezei cu nu sunt amortizări). Această analiză este considerată ca suport pentru celelalte analize.
- **Analiza armonică** presupune determinarea răspunsului unei structuri încărcată cu o sarcină variabilă armonic (de ex. sinus). Această analiză este importantă pentru proiectare deoarece orice mișcare periodică oarecare se poate considera ca o suprapunere de un număr finit de vibrații armonice elementare.
- **Analiza tranzitorie**, ca problemă generală, presupune determinarea răspunsului pentru încărcarea cu sarcini (forțe/momente și/sau deplasări) variabile după funcții oarecare în timp (inclusiv neliniare). Soluția aceste probleme se obține prin integrare directă, frecvent numeric, a ecuației de mișcare.
- **Analiză spectrală (în frecvență)**, urmărește determinarea răspunsului liniar al unei structuri pe baza unor înregistrări spectrale (funcții de frecvență în deplasare, viteză sau accelerație) obținute experimental sau teoretic ca urmare a unor analize tranzitorii.

Tab. 1

Tipul analizei	Cunoscute	Necunoscute	Observații
Statică	Forțe, presiuni, forțe inerțiale în regim staționar (greutate proprie, centrifugale), deplasări impuse, câmpuri termice	Deplasări, tensiuni, deformații, eforturi, reacțiuni	- Nu ia în considerare explicit timpul și se neglijează forțele inerțiale nestaționare și/sau de amortizare. - Se consideră valabile ipotezele deplasărilor mici ce conduce la un model algebric de ecuații liniare (<u>analiză statică liniară</u>); în caz contrar, deplasări mari, modelul algebric neliniar se rezolvă prin metode incremental-iterative, Newton-Raphson (<u>analiză statică neliniară</u>)
Modală		Frecvențele și modurile proprii de vibrație (valori și vectori proprii)	- Analiza modală este considerată o analiză liniară deși rezolvarea se face cu metode numerice iterative (Jacobi, QR, Lanczos) - Pentru modele cu mai multe grade de libertate rezolvarea problemei conduce la frecvențe proprii de valori mici și nu se justifică practic;
Tranzitorie	Forțe, deplasări dependente de timp; Viteze inițiale Caracteristici de amortizare	Răspunsul dinamic nestaționar (variații ale deplasărilor, tensiunilor, deformațiilor, reacțiunilor)	- Rezolvarea se face prin integrare numerică iterativă care se reduce la un sistem de ecuații liniare (Wilson θ, Houboldt, Newmark β)
Armonică	Forțe, deplasări, viteze, accelerații cu variații sinusoidale în timp cu amplitudini și frecvențe impuse	Răspunsul staționar al unor vibrații întreținute (forțate)	- Nu se ia în considerare efectele tranzitorii; toate încărcările trebuie să aibă aceeași frecvență
Spectrală	Încărcări sub formă de spectru (reprezentare grafică a unor date experimentale a deplasărilor, vitezelor, accelerațiilor forțelor în funcție de frecvență)	Deplasări, tensiuni, deformații, eforturi, reacțiuni	- Analiza este liniară ce are la bază compunerea răspunsurilor modale - Calculul spectral este o metodă simplificată de obținere a răspunsului tranzitoriu la încărcări aleatorii de tipul șocurilor și vibrațiilor - Pot fi diverse formulări: răspuns spectral pentru excitație (pe una sau mai multe direcții) într-un punct, multipunct, al densității de putere etc.

AEF-T.4.4 .3 ANALIZA MODALĂ CU ELEMENTE FINITE

În cazul în care forțele externe și cele de amortizare nu sunt luate în considerare, ecuația de mișcare generală () devine

$$[M] \{\ddot{D}\} + [K] \{D\} = 0.$$

Această ecuație, pentru un sistem cu n grade de libertate, are n soluții, $\{D_i\}$, $i = 1, 2 \dots n$ care sunt numite forme (moduri) proprii ale structurii. Fiecare mod propriu $\{D_i\}$ îi corespunde o frecvență ω_i numită frecvență naturală care în cazul excitării structurii conduce la rezonanță (amplitudini mărite). Cea mai mică frecvență naturală este numită frecvență (pulsatie) naturală fundamentală sau pe scurt frecvență (pulsatie) fundamentală.

Analizei modală a unei structuri presupune determinarea modurilor proprii și a frecvențelor naturale corespunzătoare. *Modul propriu* de vibrație, definit de pulsația (frecvența) proprie, se descrie de un vector modal propriu ce conține deplasări nodale corelate cu forma de deformare, nu și amplitudinea care depinde de energia de excitație. În multe situații, pentru simplificarea algoritmilor de rezolvare se neglijează efectul amortizării ($[C] \{\dot{D}\} = 0$).

Structurile mecanismelor rigide sau cele cu mișcări de corp rigid au frecvențe care sunt foarte apropiate de zero, uneori chiar negative (situații de stabilitate la limită). Deoarece, în practică, se utilizează de regulă numai modurile proprii corespunzătoare *frecvențelor proprii joase*, programele cu elemente finite consacrate rezolvă această problemă numai pentru cele mai mici valori proprii, sau dintr-o bandă precizată, folosind metoda iterațiilor pe subspații sau metoda vectorilor Lanczos.

Efortul de calcul pentru a rezolva o problemă de valori și vectori proprii crește considerabil cu numărul de grade de libertate active. În cazurile unor simetrii se pot obține frecvențe proprii coincidente.

AEF-T.4.4.4 ANALIZA RĂSPUNSULUI ARMONIC CU ELEMENTE FINITE

Analiza armonică urmărește determinarea răspunsului în frecvență la încărcări cu sarcini cu variație sinusoidală (armonică) în timp, de forma,

$$F_i = A_i \sin(\omega t + \phi_i),$$

în care, A_i este amplitudinea, ω_i – frecvența unghiulară, ϕ_i – faza unghiulară ale forței. Datorită formei, corespunzătoare unei funcții periodice, a forței externe, rezolvarea ecuației () este mult simplificată decât în cazul tranzitoriu, și va rezulta o funcție deplasare staționară cu forma

$$D_i = B_i \sin(\omega t + \varphi_i),$$

în care, B_i este amplitudinea și φ_i – faza unghiulară ale deplasării.

Practic, analiza răspunsului armonic al unei structuri încărcată cu sarcina F_i presupune determinarea amplitudinii B_i și fazei φ_i corespunzătoare fiecărui grad de libertate într-un domeniu de frecvențe definit. Analiza armonică fiind liniară, nu se iau în considerare neliniaritățile (de material, de contact) și vibrațiile libere apărute la începerea excitației.

Analiza armonică presupune următoarele etape:

- *Analiza statică* în vederea determinării efectelor pretensionărilor
- *Analiza modală* pentru determinarea frecvențelor proprii de vibrație și a tendințelor de deformare a structurii; la analiza modală nu se iau în considerare încărcările doar constrângerile.
- *Analiza dinamică de tip armonic* propriu-zisă ce urmărește determinarea caracteristicilor amplitudine-frecvență la solicitarea cu încărcare periodică.

Rezultatele analizelor evidențiază graficele unor răspunsuri cantitative (deplasări, tensiuni, deformații) în funcție de frecvență.

AEF-T.4.4.5 ANALIZA RĂSPUNSULUI TRANZITORIU CU ELEMENTE FINITE

Analizele răspunsului dinamic tranzitoriu presupune rezolvarea ecuației (), pentru cazul general, când forța externă este dependentă de timp. Pentru analizele cu elemente finite modelul geometric și constrângerile sunt aceleași ca la analiza dinamică armonică; se pot introduce și amortizări; se pot introduce condiții inițiale privind deplasări, viteze și/sau accelerații care se obțin prin analize statice preliminare. Metode de integrare: Newmark (dezvoltări cu diferențe finite în intervalul dintre două iterații),