

AEF-T.3.6

MODELAREA CU ELEMENTE FINITE (DISCRETIZAREA)

CUPRINS

AEF-T.3.6.1 INTRODUCERE

AEF-T.3.6.2 TIPURI DE ELEMENTE FINITE

AEF-T.3.6.3 METODE DE MODELARE CU ELEMENTE FINITE

AEF-T.3.6.4 ALEGEREA ELEMENTELOR FINITE ȘI A PARAMETRILOR DE DISCRETIZARE

AEF-T.3.6.1 INTRODUCERE

Metodele numerice (inclusiv MEF) de analiză a fenomenelor fizice care au loc în domenii geometrice continue presupun înlocuirea acestora cu domenii idealizate (aproximative), ca reuniuni de subdomenii mai mici, în cazul MEF, numite **elemente finite**. Frontierele elementelor finite sunt compuse din puncte (**noduri**), linii drepte sau curbe (**linii nodale**) și/sau suprafețe plane sau oarecare (**suprafețe nodale**). Operația de alegere a numărului de noduri și a tipului liniei sau suprafeței cu respectarea continuităților la nivel nodal, în vederea modelării cu elemente finite a domeniilor geometrice, se numește **discretizare**. În fig. 1 se prezintă, ca exemplu, domeniul bidimensional, D , discretizat în elemente finite triunghiulare cu laturi linii drepte (fig. 1,a) și cu laturi linii curbilinii (fig. 1,b). În primul caz, al elementelor finite cu laturi linii drepte, eroarea de discretizare poate fi micșorată prin mărirea numărului de noduri și, deci, implicit, a numărului elementelor finite. În cel de-al doilea caz, eroarea de discretizare se poate micșora și datorită frontierelor curbilinii ale elementelor finite.

AEF-T.3.6.2 TIPURI DE ELEMENTE FINITE

Dezvoltarea continuă a softurilor performante care au la bază MEF s-a realizat prin diversificarea tipurilor de elemente finite în asociere cu diversele fenomene fizice de analizat. Deși MEF este o metodă generală de rezolvare a ecuațiilor diferențiale sau integro-diferențiale de guvernare a diferitelor fenomene fizico-tehnice care au condiții inițiale și limită diverse, din considerente de productivitate și economicitate nu s-au dezvoltat elemente finite cu grad mărit de generalitate ci s-au definit și modelat elemente finite personalizate pentru diverse domenii (1D, 2D, 3D), niveluri de aproximare reduse (funcții algebrice liniare și parabolice), materiale (liniare, neliniare) și tipuri de probleme (statice, dinamice etc.).

În general, din punct de vedere al tipurilor domeniilor geometrice de modelat, elementele finite pot fi **unidimensionale**, pentru domenii geometrice de tip linie; **bidimensionale**, pentru suprafețe; **tridimensionale**, pentru volume. Aceste elemente finite din punct de vedere al funcției de aproximare pot fi **liniare**, cu muchii linii drepte, sau **neliniare**, cu muchii curbilinii. De obicei, elementele finite neliniare după tipul polinomului de aproximare folosit, pot fi parabolice **pătratic** (de ordinul doi), cu un singur nod intermediar, sau **cubice** (de ordinul trei) cu două noduri intermediare.

În tabelul 1 se prezintă cele mai utilizate elemente finite întâlnite în cadrul majorității softurilor performante care au la bază MEF. Unele din aceste programe, pentru realizarea discretizării cu grade de aproximare diferite a unui domeniu geometric, au elemente finite mixte din punct de vedere al aproximării (cu liniile nodale linii drepte și curbe). Astfel, în fig. 2 se prezintă discretizarea unui domeniu plan cu elemente finite liniare și neliniare; pentru realizarea continuității structurii de elemente finite la nivel nodal între zonele discretizate cu cele două tipuri

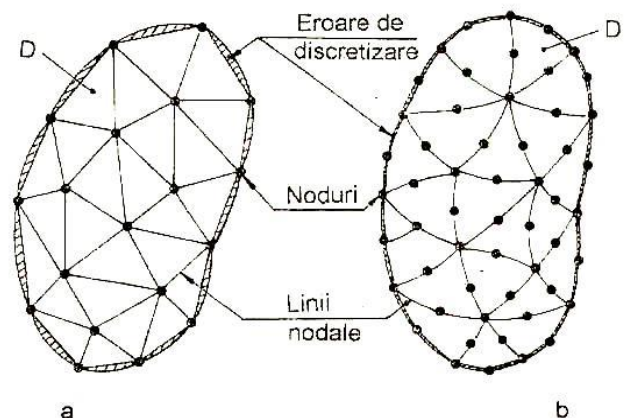


Fig. 1

de elemente finite se interpune o zonă intermediară discretizată cu elemente finite mixte care au pe laturile comune aceleași numere de noduri.

Din punct de vedere al particularităților geometrice și, uneori, fizice impuse de problemele de analizat, elementele finite, modelate și implementate în bibliotecile specifice ale programelor performante, sunt diverse. În tabelul 1 se prezintă principalele elemente finite conținute de programele performante comerciale de analiză cu MEF, cu menționarea principalilor parametri de intrare și de ieșire. Astfel, se întâlnesc elemente finite particulare impuse de tipul domeniului geometric (bare, plăci, membrane și structuri masive spațiale), de solicitările structurii (bare solicitate la tracțiune-compresiune sau la tracțiune-compresiune, forfecare, torsiune și încovoiere), de stările de tensiuni și de deformății (plăci în starea plană de tensiuni sau de deformății și structuri spațiale axial simetrice), de tipul parametrilor de intrare/ieșire și de configurația internă a materialului (structuri masive, stratificate). Pe lângă aceste tipuri de elemente finite, care au caracter structural, majoritatea programelor performante au și elemente nestructurale specializate (Mass, Rigid, Spring, Dumper etc.), pentru modelarea problemelor de legături mecanice, și pentru modelarea cu grad mărit de idealizare (masă concentrată, rigid, arc, arc-amortizor etc.), utilizabile pentru modelarea totală sau parțială a structurilor, când precizia și costul sunt adecvate. În tabelul 2 se prezintă principalele grupe de elemente nestructurale, incluse în grupele menționate mai sus, care se întâlnesc frecvent în programele performante comerciale pentru analiza câmpurilor mecanice.

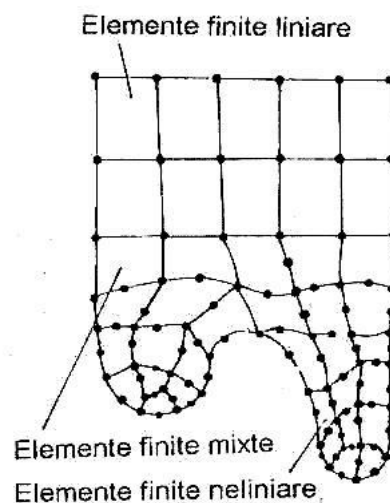
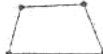
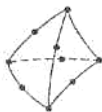
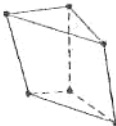
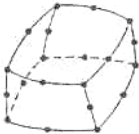
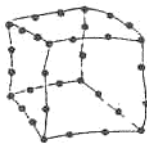


Fig. 2

Tab. 1

Tipul domeniului	Forma geometrică	Tipul (gradul) polinomului de aproximare			
		Liniar	Pătratic	Cubic	
Unidimensional	Linie				
Bidimensional	Triunghiulară				
	Patrulateră				
Tridimensional	Tetraedrală				
	Pentaedrală				
	Hexaedrală				
Obs. Din punct de vedere al gradelor polinoamelor de aproximare a geometriei și parametrilor fizici, elementele finite pot fi: <u>izoparametrice</u> (aceleași funcții de aproximare), <u>subparametrice</u> (aproximarea geometriei mai grosier) sau <u>supraparametrice</u> (aproximarea geometriei mai precis)					

Tab. 2

Tipul geometriei	Caracteristici specifice	Parametri de intrare	Parametri de ieșire
Unidimensională	Bară dreaptă sa curbă solicitată la tracțiune-compresiune	Parametrul secțional (aria) Setul parametrilor de material	Deplasări nodale Tensiuni elementele Eforturi Forțe de reacțiune
	Bară dreaptă sa curbă solicitată la tracțiune-compresiune, forfecare, torsiune și încovoiere	Parametrii secționali (aria și momentele de inerție) Setul parametrilor de material	
Bidimensională	Placă plană în starea plană de tensiuni	Grosimea Setul parametrilor de material	Deplasări nodale Tensiuni elementale în plane diferite Forțe nodale Forțe de reacțiune
	Placă plană în starea plană de deformății	Setul parametrilor de material	
	Placă spațială	Grosimea Setul parametrilor de material	
	Membrană	Grosimea Setul parametrilor de material	
	Placă stratificată	Grosimea Setul parametrilor de material	
	Structură spațială în starea de tensiuni axisimetrică	Setul parametrilor de material	Deplasări nodale Tensiuni elementele Forțe nodale Forțe de reacțiune
Tridimensională	Structură spațială	Setul parametrilor de material	

Elementele **inerțiale** sau **masice** modelează structura unui element al unui sistem mecanic sau părți din acesta prin reducerea acesteia la un punct material căruia i se asociază proprietăți masice și/sau inerțiale echivalente.

Modelarea simplificată a zonelor din structurile mecanice cu rigidități mărite se poate face cu elemente finite de tip **rigid**, care introduc unul sau mai multe noduri cu poziții relative invariabile, după grade de libertate definite anterior, față de un alt nod. Spre deosebire de această posibilitate de modelare, elemente sistemelor mecanice sau părți ale acestora pot fi înlocuite cu elemente care reduc structura acestora la două puncte materiale (noduri) legate printr-un arc (element finit de tip **arc**) sau printr-un sistem arc-amortizor (element finit de tip **arc-amortizor**) pentru care se introduc ca date de intrare valorile caracteristicilor corespunzătoare (fig. 3).

Tab. 3

Tip element finit	Caracteristici	Parametri de intrare	Parametri de ieșire
Inerțial, masic	Mononodal	Mase, momente de inerție și matrice de inerție	Deplasări nodale Forțe nodale
Rigid	Multinodal	Gradele de libertate cu mișcări relative anulate	Deplasări nodale Forțe nodale
Arc	Binodal	Rigiditate liniară sau torsională	Deplasări nodale Forțe nodale Forțe interne
Arc-amortizor	Binodal	Rigiditatea și constanta de amortizare	

AEF-T.3.6.3 METODE DE MODELARE CU ELEMENTE FINITE

Operația de divizare (discretizare) a domeniului geometric al problemei de analizat în subdomenii este complexă, cu implicații atât asupra preciziei rezultatelor cât și asupra duratei (costului) analizei.

Modelarea cu elemente finite a domeniului geometric al problemei de analizat, folosind programe performante care au la bază MEF, se poate realiza pe una din căile descrise în continuare.

Generarea rețelei de elemente finite manual (direct), fără model geometric, în ultimul timp rar utilizată, se folosește în cazul problemelor cu geometrii foarte simple, pentru modificarea sau completarea modelelor cu elemente finite deja existente și pentru obținerea elementelor nestructurale.

Generarea rețelei de elemente finite automat se face pornind de la un model geometric sau de la un model cu elemente finite generate anterior. Majoritatea programelor performante au comenzi care permit discretizarea entităților geometrice primare de tip linie, suprafață și volum. În ultima perioadă de timp pachetele performante de analiză cu elemente finite au procesoare de discretizarea automată a domeniilor geometrice complexe. Discretizarea automată, chiar cu menționarea dimensiunii elementului finit ideal și/sau a pozițiilor nodurilor pe frontiera domeniului, datorită performanțelor modelului cu elemente finite și a complexității domeniului geometric, uneori, conduce la: structuri cu elemente finite inadecvate (cu abateri mărite de la forma ideală și/sau cu salturi dimensionale), creșterea excesivă a numărului de noduri și elemente finite și/sau la obținerea unor elemente finite puternic deformate (distorsionate),

Generare rețelei de EF semiautomat cu tehnici similare din CAD. În multe situații, pentru obținerea structurii cu elemente finite, se pot utiliza comenzile de copiere a unui model parțial cu elemente finite. În fig. 3 se prezintă, ca exemplu, copierea prin translație (fig. 3,b) și respectiv, prin rotație cu 180° (fig. 3,c) a structurii cu elemente finite unidimensionale din fig. 3,a.

Utile pentru modelarea cu elemente finite sunt și comenzile de generare elemente finite, bidimensionale sau tridimensionale, prin extrudarea de translație sau de rotație a unor structuri cu elemente finite de ordin inferior, unidimensionale sau, respectiv, bidimensionale.

De exemplu, în fig. 4,b și c se prezintă structurile cu elemente finite tridimensionale, generate **extrudând** prin translație după un vector și, respectiv, prin rotire cu 90° în jurul unei axe, a structurii cu elemente finite bidimensionale din fig. 4,a. În fig. 4,d se prezintă structura de elemente finite bidimensionale obținută în urma **oglinzirii** față de un plan a structurii din fig. 4,a.

Discretizarea semiautomată este eficientă dar se reduce la o clasă redusă de forme pentru care **Discretizare uniformă** (dimensiunea EF este aceeași) pentru întreg modelul și neuniformă cu dimensiune variabilă.

Discretizarea adaptivă, de obicei, se face în scopul, rafinării (creșterii fineței rețelei de elemente finite) frecvent cu păstrarea formei elementului finit. Controlul acestei discretizări se poate face pe baza indicatorului erorii structurale E . Astfel, dacă la prima discretizare, rezultă, de ex. $E > 10\%$, în urma discretizării adaptive automat în zona în care abaterea de discontinuitate a tensiunilor $[\Delta\sigma]$ se ajunge la o valoare mult redusă a acestui indicator (de ex. $E = 5\%$). Rafinarea discretizării, în vederea evitării discontinuității tensiunilor, în practică, se poate face prin trei metode. **Metoda h** presupune creșterea fineței de discretizare prin scăderea dimensiunii (de obicei, marcată cu h) elementelor finite. **Metoda p** presupune folosirea elementelor finite de aceeași formă dar cu polinoame de aproximare de ordin superior (apar noduri pe laturile elementelor finite). **Metoda $h-p$** se realizează prin combinarea metodelor h și p . Nici una din aceste metode nu conduce la erori E foarte mici deoarece, pe de-o parte, dimensiunea elementului finit nu poate ajunge la valori foarte mici sub o anumită limită și, pe de altă parte, gradul polinomului de interpolare este limitat superior (frecvent este gradul doi).

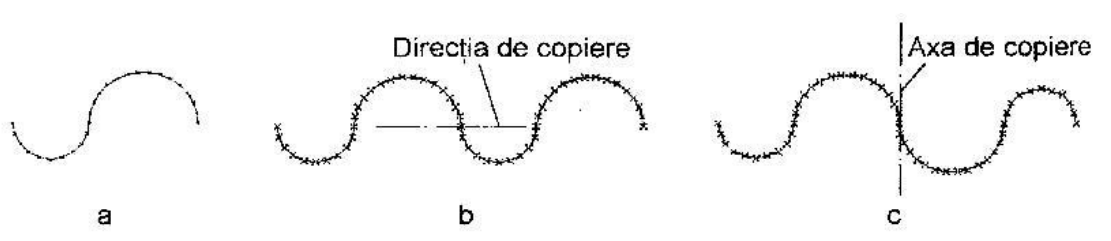


Fig. 3

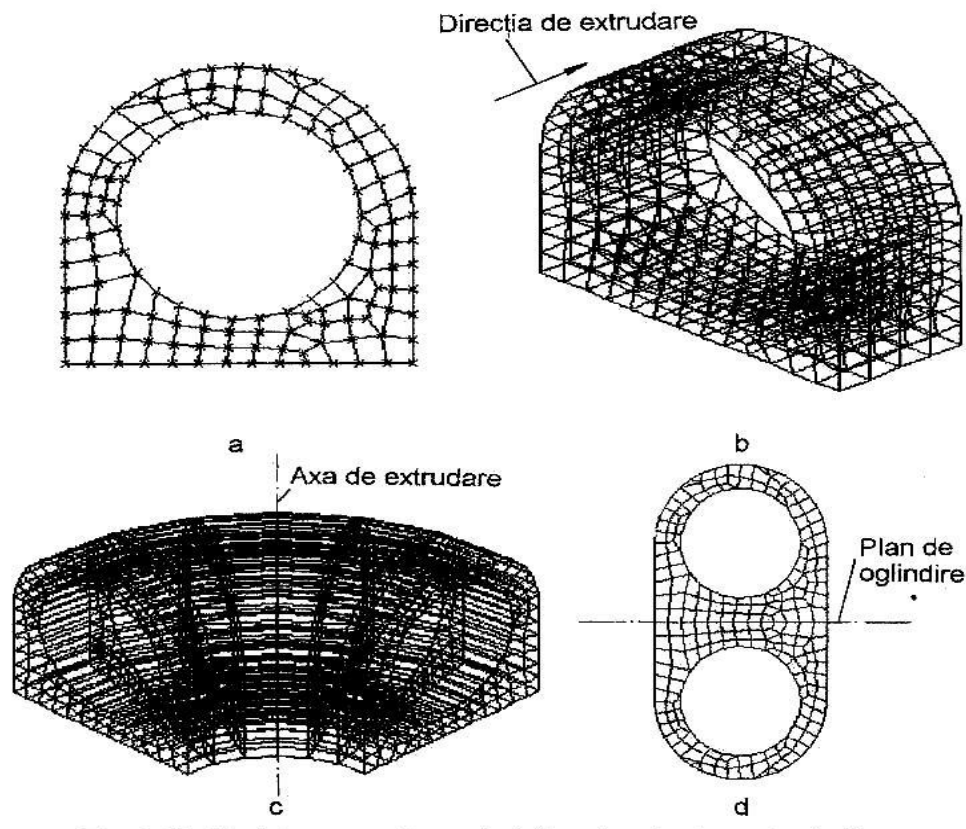


Fig. 4

AEF-T.3.6.4 ALEGEREA ELEMENTELOR FINITE ȘI A PARAMETRILOR DE DISCRETIZARE

Adoptarea tipurilor elementelor finite și a fineței de discretizare a modelului geometric al unei probleme se realizează ținând cont de aspecte cu implicații economice (timpi de rezolvare, metodologii de analiză și posibilități de pre și postprocesare) și de precizia preconizată a rezultatelor.

Pentru multe probleme practice, forma geometrică a domeniului de analizat, corelată cu încărcările exterioare, constituie o sursă primară de informație privind grupa din care face parte elementul finit care urmează a fi folosit. Astfel, de exemplu, pentru cazurile structurilor din fig. 5,a,b și c se pot adopta elemente finite unidimensionale, bidimensionale și, respectiv, tridimensionale. Dar, alegerea optimă a elementelor finite nu este întotdeauna așa de simplă pe cât pare la prima analiză a problemei, mai mult, alegerea doar după intuiție, în multe cazuri, s-a dovedit a nu fi suficient de potrivită. Deci, adoptarea adecvată a tipurilor elementelor finite și a parametrilor de discretizare (predefinirea dimensiunilor elementelor finite), pentru rezolvarea unei probleme date, implică experiență în această activitate. Aceasta se dobândește prin testări și

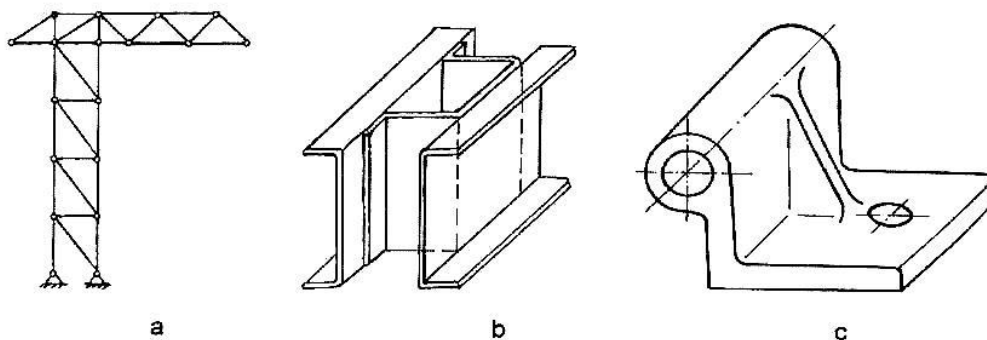


Fig. 5

confruntări repetate ale rezultatelor obținute în urma analizelor aceleiași probleme prin folosirea de diferite tipuri de elemente finite și de discretizări. Eficiența unui model de analiză cu elemente finite, personalizat prin tipurile de elemente finite folosite în corelație cu gradul de finețe al discretizării, se cuantifică prin precizia rezultatelor obținute și prin timpul de rezolvare a modelului numeric asociat.

Adoptarea parametrilor de discretizare, care predefinesc dimensiunile și a numărul elementelor finite, se face astfel încât să se obțină o diferență minimă între soluția aproximativă ϕ_a (obținută prin analiza cu elemente finite) și cea exactă ϕ (fig. 6). Procesul apropierei soluției obținute de soluția exactă odată cu creșterea numărului de elemente finite este numit **convergență**.

Teoretic, la limită, dacă dimensiunile elementelor finite ar deveni infinit de mici, s-ar obține soluția exactă. În fig. 6 [34] se observă

că există un număr de elemente finite, N_e , care, dacă este depășit, nu conduce la o creștere semnificativă a convergenței încât să justifice efortul de calcul suplimentar necesar. Astfel, pentru soluția căutată prin analiza cu elemente finite există o margine superioară, M , sau una inferioară, m , spre care tinde procesul de convergență. În plus, acesta este influențat și de tipul funcțiilor de aproximare a câmpului parametrului fizic, atașate elementului finit ales care, în cazul elementelor finite izoparametrice, sunt aceleași cu funcțiile de aproximare ale domeniului geometric. Deci, pentru îmbunătățirea convergenței, se pot realiza structuri cu elemente finite de ordin superior (funcții de aproximare polinomiale cu grad mărit) cu grad de finețe micșorat sau se pot genera parametri de discretizare cu elemente finite de grad inferior dar cu un grad de finețe mărit.

Poziționarea nodurilor în domeniul geometric al problemei de analizat, la discretizare, se face automat cu algoritmi care trebuie să localizeze noduri și în zonele care apar discontinuități geometrice (salturi dimensionale) și fizice (neomogenități de material, concentrări și/sau neuniformități de încărcare) și condiții limită impuse.

În multe probleme ingineresti, pentru modelarea cu elemente finite a domeniului geometric, este necesar să se folosească două sau chiar mai multe tipuri de elemente finite. Des întâlnite în practică sunt situațiile în care se cuplează elementele finite unidimensionale cu cele bidimensionale. De exemplu, pentru modelarea structurii aripii din fig. 7 se pot folosi elemente finite de tip bară pentru modelarea liselor și tălpilor lonjeroanelor și elemente finite de tip placă (în starea plană de tensiuni) și membrană pentru modelarea nervurilor, lonjeroanelor și, respectiv, învelișului. În cazul existenței unor zone de concentrare a câmpurilor necunoscute pentru obținerea valorilor maxime ale acestora este necesară creșterea fineței de discretizare sau utilizarea unor elemente finite superioare (cu grad mărit de aproximare) în aceste zone (fig. 8).

Precizia rezultatelor unei analize cu elemente finite este influențată și de modul de aproximare a geometriei contururilor domeniilor problemelor de analizat. Elementele finite triunghiulare și tetraedrale asigură posibilități mai largi de aproximare a domeniilor mărginite de linii și, respectiv, de suprafețe față de cele patrulate și, respectiv, tetraedrale care pe de altă parte reproduc mai coerent distribuțiile tensiunilor. Îmbunătățirea aproximării contururilor complexe ale domeniilor geometrice se poate face prin creșterea numărului elementelor finite liniare (cu linii nodale drepte) sau prin utilizarea elementelor finite neliniare (cu noduri intermediare pe liniile nodale), dar mai puține ca număr.

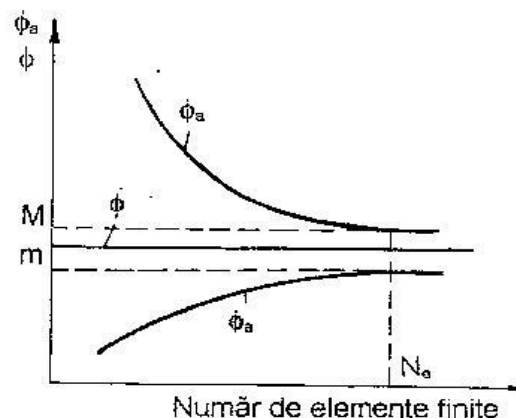


Fig. 6

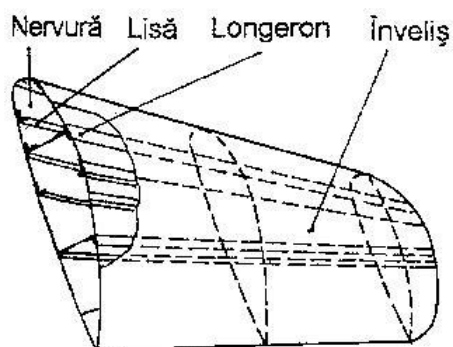


Fig. 7

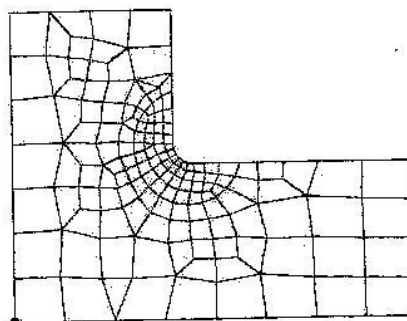


Fig. 8

Pe de altă parte, convergența și precizia modelului cu elemente finite sunt influențate și de apropierea formei elementelor finite adoptate de formele regulate asociate (triunghi echilateral, pătrat, tetraedru regulat și cub) considerate ca fiind elemente finite ideale. Aprecierea abaterilor elementelor finite obținute în urma discretizării față de cele ideale, în multe din programele performante cu MEF la bază, de exemplu, se poate face și prin intermediul valorilor parametrilor:

- **factorul de aspect**, ca raport dintre maximul și minimul lungimilor muchiilor elementului finit ($\max\{a, b, c, d\}/\min\{a, b, c, d\}$, fig. 9,a);
- **factorul de îngustare**, ca maxim al raportului dintre laturile opuse ale elementului finit ($\max\{a/c, c/a, b/d, d/a\}$, fig. 9,a);
- **abaterea unghiurilor interioare**, ca maxim al abaterilor unghiurilor elementului finit de la valoarea de 60° sau 90° a elementului ideal (α , fig. 9,b,c);
- **abaterea de la planeitate**, ca maxim al unghiurilor diedre dintre normalele planelor formate de seturi a câte trei noduri (β , fig. 9,d).

Majoritatea programelor performante care au la bază MEF permit verificarea formelor elementelor finite și indică valori limită pentru parametri care cuantifică abaterile acestora de la forma ideală.

Pentru fiecare tip de element finit folosit la discretizarea modelului geometric al problemei de analizat se asociază câte un set de valori ale parametrilor caracteristici care descriu proprietățile **geometrice** (arii, momente de inerție, grosimi etc.) și **fizice** (caracteristici mecanice și termice ale materialului, densitatea, coeficientul de amortizare, temperatura de referință etc.). Pentru introducerea și modificarea valorilor parametrilor caracteristici, pachetele de programe performante care au la bază MEF dispun de comenzi sintetice sau de sisteme de meniuri adecvate fiecărei grupe de elemente finite.

Recomandări privind modelarea cu elemente finite

- folosirea de elemente finite simple;

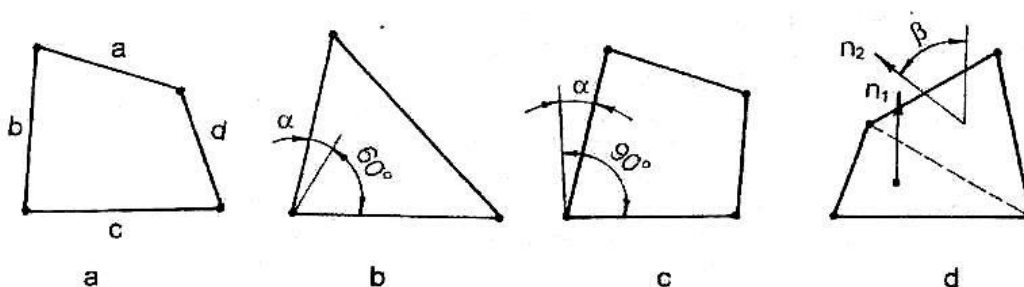


Fig. 9

- utilizare de modele liniare la început care apoi vor fi modificate pentru a fi îmbunătățirea performanțelor analizei;
- discretizare cu finețe mărită în zona concentratorilor de tensiune;
- discretizare cu finețe mărită în zona forțelor concentrate;
- discretizare cu finețe mărită în zona reacțiunilor concentrate;
- discretizare cu finețe mărită în zonele de legătură (contacte);
- se vor evita discretizările în care apar elemente finite cu distorsiuni (rapoartele între latura cea mai lungă și cea mai scurtă să fie mai mic decât 3)
- frontierele fizice (cu modificare a caracteristicilor de material) se vor descrie de laturi sau suprafețe de elemente finite (cele două părți vor fi modelate cu elemente distincte care nu vor traversa frontiera);
- pentru modelele de analiză 2D elementele finite cu forma patrulater sunt de preferat celor cu formă triunghiulară (elementele finite triunghiulare sunt convenabile în zonele de tranziție, a colțurilor și gurilor)
- pentru modelele de analiză 3D elementele de formă de hexaedru sunt de preferat celor de formă tetraedru sau pentaedru
- finețea de discretizare (dimensiunea elementului finit) este foarte greu de ales corect apriori; în principiu, numărul de noduri este bine să fie cât mai mare pentru a obține rezultate cât mai precise, dar la creșteri exagerate ale acestui număr apare pericolul neconvergenței soluției și erorilor de calcul necontrolate.
- verificarea calității discretizării, mai ales, când se face automat pentru a se detecta: creșterea excesivă a numărului de noduri și elemente finite; generarea unor elemente finite puternic distorsionate; discontinuitățile la nivel de frontieră.

Un model cu elemente finite poate fi descris de: numărul de noduri, tipul elementelor finite, numărul de elemente finite, dimensiunile elementelor finite extreme (maxime și minime).