

AEF-T.3.11

ANALIZA REZULTATELOR

CUPRINS

AEF-T.3.11.1 INTRODUCERE

AEF-T.3.11.2 ERORI DE MODELARE ȘI REZOLVARE

AEF-T.3.11.3 INDICATORI DE EROARE STRUCTURALI

AEF-T.3.11.4 VERIFICAREA ȘI VALIDAREA MODELULUI

AEF-T.3.11.5 INTERPRETAREA REZULTATELOR

AEF-T.3.11.1 INTRODUCERE

Rezultatele obținute în urma unei analize cu elemente finite pot greși din mai multe motive și deci implică verificări, analize detaliate și interpretarea rezultatelor în concordanță așteptările utilizatorului

Înainte de a trece la analiza rezultatelor se impune verificarea datelor de intrare (postprocesare): unități de măsură, tipul elementelor finite, proprietățile de material, finețea de discretizare, valorile și direcțiile încărcărilor, temperatura de referință etc.

Deciziile finale asupra corectitudinii rezultatelor se iau de către analistul de AEF și practica a dovedit de multe ori că performanța acestora depinde de pregătirea teoretică dar și de experiența acestuia.

AEF-T.3.11.2 ERORI DE MODELARE ȘI REZOLVARE

Modelarea și analiza cu elemente finite se face cu aproximări care conduc la abateri (erori) de la soluția exactă necunoscută. Având în vedere că sursele de erori apar în mai toate etapele de modelare și de rezolvare a modelelor cu elemente finite se impune cunoașterea și evaluarea acestora în vederea reducerii erorilor.

Erorile de concepție a modelelor apar din nesatisfacerea principiilor și ipotezelor care definesc categoriile de probleme (de ex. neîncadrarea în ipotezele de liniaritate geometrică sau fizică)

Erorile de modelare geometrică apar ca urmare a procesului de aproximare a geometriei reale pentru a simplifica modelul de analiză cu elemente finite

Erorile de modelare a caracteristicilor materialelor sunt legate de precizia constantelor fizice (de elasticitate, plasticitate, de amortizare, de conductivitate termică etc.) precum și a parametrilor variabili (curba elasticitate, de plasticitate). Aceste erori sunt semnificative deoarece nu există date (modulul de elasticitate, coeficientul contracției transversale) suficient de precise legate de comportarea materialului real (modificat prin tratamente termice) care din punct de vedere funcțional este descris prin alți parametri (duritatea, rezistențele limite). În practica analizelor cu elemente finite s-a evidențiat că variații mici ale valorilor parametrilor caracteristici de material conduc la variații relativ mari (uneori, de până la zece ori mai mari) ale rezultatelor.

Erorile de modelare (discretizare) cu elemente finite, legate de principiile de bază ale metodei, constau în faptul că aproximează (fig. 1) variația unui parametru fizic necunoscut (frecvent deplasarea) pe subdomeniu al structurii reale cu o funcție de aproximare (de obicei, polinomială de gradul unu (liniară) sau de gradul doi (neliniară)). Valorile erorilor sunt determinate de tipul elementului finit (prin funcția de aproximare implementată), dimensiunea acestuia (finețea de discretizare), continuitatea structurii de elemente finite, compatibilitatea (conformitatea) cu fenomenul fizic (păstrarea continuității în pe parcursul evoluției fenomenului fizic, de ex deformația)

Erorile de modelare a încărcărilor (sarcinilor) sunt generate de aproximările privind: tipul acțiunii (static sau dinamic; staționară sau nestaționară) modul de aplicare (în punct, pe linie, pe suprafață, în volum), poziția în model, distribuția (variație deterministă sau aleatorie), valorile maxime, direcția

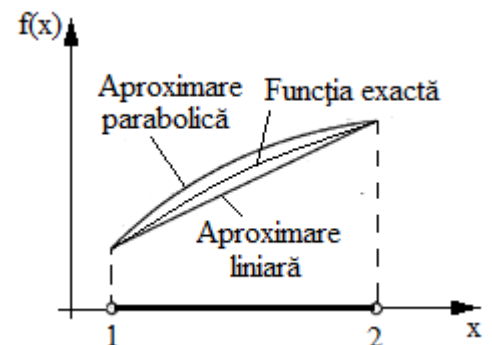


Fig. 1 Aproximarea parametrilor elementului finit

Pentru micșorarea erorilor, programele performante actuale au module de încărcate dedicate (de ex. de tip lagăr)

Erorile de modelare a constrângerilor sunt generate de aproximarea condițiilor de rezemare prin deplasări impuse (de obicei, nule) asociate unor grade de libertate ale unor noduri ale modelului cu elemente finite. Programele performante actuale, pentru modelarea cu acuratețe mărită a legăturilor dintre elementele constructive au elemente finite dedicate (ex. de contact, spring)

Erorile de calcul rezultă ca propagări și cumulări ale *erorilor de trunchiere* care apar la procesare datelor ca urmare a reprezentării variabilelor în calculator cu un număr finit de cifre. Aceste erori devin importante, în cazul dimensiunilor mult reduse ale elementelor finite, uneori comparabile cu abaterile de trunchiere, influențează convergența soluție și implicit precizia rezultatelor. Astfel, unele pachete performante de analiză cu elemente finite au module de control a erorilor de calcul ținând cont de un prag prestabilit.

Erorile de convergență sunt, cu precădere, generate de abateri de formulare matematică a modelului cu elemente finite. Procesul de găsim a soluției unui model de analiză cu elemente finite se consideră divergent când timpul de calcul este mult mărit (tinde la infinit) și poate apărea, pe de-o parte, în cazul din iregularităților (*singularităților*) geometrice (colțuri), de aplicare a forțelor (concentrate), de rezemare și/sau în cazurile definirii incorecte a valorilor parametrilor proceselor de calcul (număr de iterații, toleranțe de convergență etc.). Singularitățile se pot evidenția în procesele de convergență, nu invalidează toate rezultatele, și nu se pot corecta prin rediscretizare.

AEF-T.3.11.3 INDICATORI DE EROARE

Aspecte privind abaterile tensiunilor și eficiența discretizării:

- în cazul modelelor numerice cu elemente finite care au ca funcții de aproximare a deplasărilor u de clasa C^0 (funcție continuă dar derivata discontinuă) apar discontinuități ale tensiunilor în noduri deoarece $\sigma = E \varepsilon = E du/dx$.
- acestea provin, în general, din slabele performanțe ale elementelor finite ()
- în multe pachete performante eficiența discretizării se evaluează prin analiza discontinuităților tensiunilor la nivel nodal și la nivel global caz pentru care s-a considerat continuitatea deplasărilor la nivel nodal
- discretizarea modelului se îmbunătățește prin creșterea numărului de elemente finite, și, în consecință, abaterile de discontinuitate scad, deci, acestea pot fi folosite pentru evaluarea eficienței discretizării;
- pentru aprecierea discontinuității tensiunilor (nodal și global) la nivel de noduri, ținând cont de deviațiile tensiunilor, se utilizează indicatori asociați unei componente σ_{ii} a vectorului tensiunii $[\sigma] = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}]$ sau altei tensiuni (echivalentă, medie etc.).

Indicatori de eroare (eficiența discretizării):

- a.** *Tensiunea medie nodală* evaluează nivelul de discontinuitate a tensiunilor între elementele vecine (fig. 2), se folosește foarte des media aritmetică a tensiunilor elementelor care au nodul n comun,

$$[\sigma_n^m] = \frac{\sum_{j=1}^{m_e} [\sigma_n^j]}{m_e},$$

unde $[\sigma_n^j]$ sunt tensiunile celor $j = 1, 2, \dots, m_e$ elemente finite cu nodul comun n.

- b.** *Abaterile tensiunilor nodală* corespundătoare elementelor finite cu nodul comun n,

$$[\Delta\sigma] = [\sigma_n^m] - [\sigma_n^j]$$

- c.** *Abaterile medii globale nodale:*

$$\sigma_{ii}^{\min} = \min(\sigma_{ii}^m - \Delta\sigma_n), \ \sigma_{ii}^{\max} = \max(\sigma_{ii}^m - \Delta\sigma_n),$$

în care, $\Delta\sigma_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_e} (\Delta\sigma_i)^2 / m_e}$ este abaterea medie globală

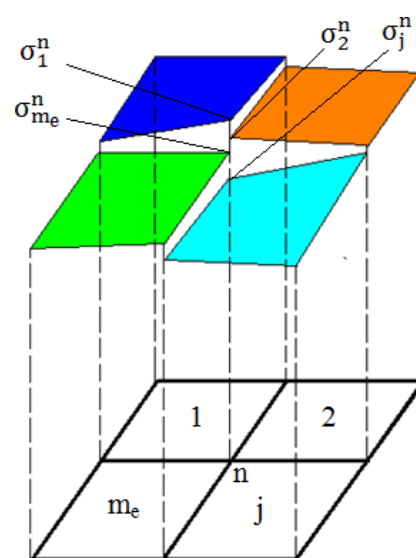


Fig. 2 Discontinuitatea tensiunilor

a tensiunilor pentru întregul modelul cu m_e elemente finite cu $\Delta\sigma_i$ – maximul absolut al abaterilor tensiunilor corespunzătoare elementelor finite cu nodul i comun.

- d. *Eroarea globală de discontinuitate a energiei (energy norm)*, pentru un tip de element finit și o încărcare date, ca o măsură a discontinuității tensiunilor în noduri la nivelul întregului model (sau doar pentru o parte a acestuia), în formulare energetică se definește ca eroare a energiei potențiale de deformare,

$$e = \sum_{j=1}^{m_e} e_j = \sum_{j=1}^{m_e} \int_V [\Delta\sigma]^T [D]^{-1} [\Delta\sigma] dV,$$

în care, e_j este eroarea de discontinuitate a tensiunilor elementului finite i , $[D]$ – matricea de rigiditate a materialului, m_e – numărul total de elemente finite al modelului, V – volumul modelului; modelul pentru care e_j sunt cvasieegale (erorile sunt echilibrate) este eficient din punct de vedere al analizei.

Sintetic *eroarea globală de discontinuitate a energiei în procente ("percentage error in energy norm")*, se definește cu relația,

$$E = \sqrt{\frac{e}{U+e}} 100,$$

în care, $U = \sum_{j=1}^{m_e} U_j = \sum_{j=1}^{m_e} [d^e]^T [k^e]^{-1} [d^e]$ este energia potențială totală a modelului cu $[d^e]$ – matricea deplasărilor nodale și $[k^e]$ – matricea de rigiditate a elementului finit; în practică E este folosit și ca indicator al eficienței de discretizare. În fig. 2 se prezintă pentru o structură dată variația tensiunii și erorii structurale cu finețea de discretizare (dimensiunea elementului finit).

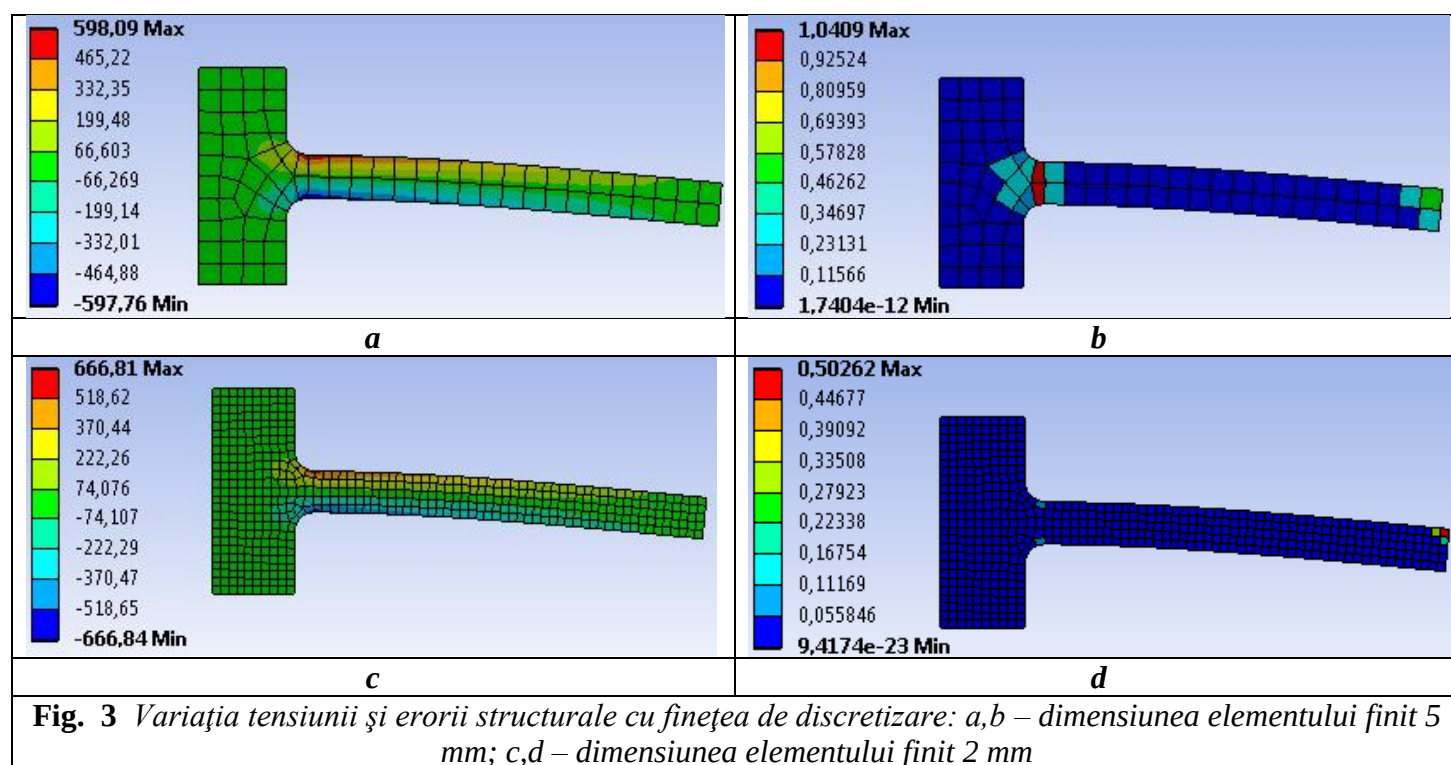


Fig. 3 Variația tensiunii și erorii structurale cu finețea de discretizare: a,b – dimensiunea elementului finit 5 mm; c,d – dimensiunea elementului finit 2 mm

Aprecierile privind performanțele rezultatelor analizelor numerice cu elemente finite se fac de obicei cu valori numerice relative.

AEF-T.3.11.4 VERIFICAREA ȘI VALIDAREA MODELULUI

Analistul FEA trebuie să aibă în vedere faptul că MEF este aproximativă ce conduce la rezultate cu erori determinate de performanțele modelului pentru analiză, modelului cu elemente finite cât și de ipotezele și procedurile numerice de calcul incluse în programul de analiză.

Validarea modelului implică **verificarea rezultatelor** ca performanțe globale și locale pentru fiecare set de condiții de contur analizate (se poate face verificare și cu alte metode numerice sau chiar, experimentale).

Testele de verificare cantitativ/calitativ globale/locale (detaliu) incluse în programe de verificare specifice fiecărei probleme generează rezultate care după interpretare, conduc la îmbunătățirea modelului cu elemente finite sau chiar a celui pentru analiză. Uneori, se pot face analize pentru două sau mai multe modele si compararea rezultatelor obținute. Modelele pot fi de același tip, adică elaborate pe baza aceleiași metode de calcul (de ex. MEF) sau de tipuri diferite, adică elaborate pe baza unor metode de calcul diferite (de exemplu MEF si metoda elementelor de frontieră sau o metodă analitică de calcul).

Verificarea rezultatelor se poate face si prin metode simple intuitive: verificarea valorilor reacțiunilor din reazeme și a ecuațiilor de echilibru ale întregii structurii cu luarea în considerare a greutateii proprii (se obține din modelul CAD); verificarea deplasărilor și tensiunilor, ordinele de mărime sau chiar valori absolute (prin calcule simplificate), direcțiile și semnele și sensurile; verificarea, cu precădere, în zonele cu deplasări și/sau tensiuni mari cu valori limită stabilite anterior.

Pornind de la faptul că rezultatele (deplasări, tensiuni temperaturi etc.) depind de tipul elementului finit, de tipul și de dimensiunea, se impune **verificarea influenței fineței de discretizare asupra preciziei rezultatelor** care se poate face, în primă fază, prin vizualizarea soluțiilor la nivel nodal (mediat) și elemental (nemediat) pentru un model cu finețe de discretizare redusă și/sau, în a doua fază, prin vizualizarea parametrilor pentru modelul rediscretizat (finețe de discretizare mărită) urmat de compararea rezultatelor cu cele obținute pentru modelul inițial. Obiectivul acestei operații nu este de a obține soluția cea mai precisă posibil ci de a obține rezultate care nu depind de tipul elementului finit și de finețea de discretizare. Procesul de rediscretizare și de convergență a soluțiilor către cvasiaceleși valori se poate realiza prin modificarea dimensiunii h elementului finit (h-convergence process, nu se modifică gradul polinomului de aproximare) sau prin modificarea gradului polinomului de aproximare p (p-convergence process, nu se modifică dimensiunea elementului finit).

În primul caz, **h-convergence process**, discretizarea devine mai fină odată cu scăderea dimensiunii EF, proces ce se poate face uniform cu modificarea discretizării la nivel global cu factor de reducere constant de la o rediscretizare la alta și neuniform cu modificarea discretizării cu factori de reducere variabil diferiți de scădere sau cu rediscretizare prin îmbunătățirea fineței local numai în zonele de creștere a gradientului (concentrator) parametrului urmărit

În al doilea caz, **p-convergence process**, similar, rediscretizarea poate fi uniformă cu EF de același grad de aproximare sau neuniformă cu EF cu grade diferite de aproximare. În cazul rediscretizării uniforme se asigură compatibilitatea (asigurarea continuității la nivel nodal) structurii de EF automat. În cazul rediscretizării p-convergență uniformă, adaptivă, se impune ca în zonele de trecere de la elemente finite cu un grad de aproximare la zonele cu alt grad de aproximare ajustarea muchiilor sau fețelor vecine prin ștergerea/adăugarea unuia sau mai multor noduri pentru asigurarea continuității nodale.

Pentru a realiza în mod efectiv o creștere a preciziei rezultatelor prin rafinarea succesivă a rețelei de elemente finite se impune ca rediscretizările anterioare să se găsească în cea curentă și, în plus, trebuie să asigure continuitatea nodală a structurii de elemente. De la un anumit nivel al fineței de discretizare în plus, rezultatele, nu se mai îmbunătățesc (precizia rămâne cvasiconstantă), și se poate continua cu testele după adoptarea altui tip de element finit utilizat.

AEF-T.3.11.5 INTERPRETAREA REZULTATELOR

Evidențierea aspectelor de neliniaritate

Deoarece, inițial, este dificil să se evalueze clar comportarea neliniară a unei structurii, în primă fază se realizează, o analiză liniară. Evaluarea încadrării problemei în grupa analizelor neliniare se poate face ca urmare a îndeplinirii uneia din următoarele două situații:

- apariția unor tensiuni ale căror valori maxime depășesc limita de curgere a materialului;
- deplasări ale căror valori maxime sunt peste 2 – 5 % din dimensiunile de gabarit ale structurii.

Dacă în urma evaluării rezultatelor postprocesate se ajunge la concluzia că de fapt structura poate avea o comportare neliniară se reia AEF în condiții de neliniaritate.